Bem-vindo(a) à nossa aplicação de preparação para exames! Chegou a hora de se destacar nos seus testes e conquistar o sucesso acadêmico que você merece. Apresentamos o "Guião de Exames Resolvidos": a sua ferramenta definitiva para uma preparação eficaz e resultados brilhantes! Aqui, encontrará uma vasta coleção de exames anteriores cuidadosamente selecionados e resolvidos por especialistas em cada área. Nossa aplicação é perfeita para estudantes de todos os níveis acadêmicos, desde o ensino médio até a graduação universitária.

Guião de correcção do exame de Matemática ACIPOL 2014

1. **Resposta :** NENHUMA DAS ALTERNATIVAS
   A frase fala de "quaisquer dois números naturais" ou seja para **todos** os elementos dos $\mathbb{N}$ (naturais). Em Matemática, "para todos" é representado por $\forall$ (**quantificador universal**). A frase quer dizer que a **a soma de dois números naturais é sempre maior que zero** ou seja considerando dois números x e y tais que $x,y \in \mathbb{N}$, então $x + y > 0$. Então, a quantificação correcta é:
   $$\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y > 0$$

2. **Resposta :** C
   A proposição $p \implies q$ (p implica q) só é falsa quando p é verdadeira e q é falsa.

3. **Resposta :** D
   Uma **conjunção** (representada por $p \wedge q$) é verdadeira **somente quando as duas proposições são verdadeiras ao mesmo tempo.** Logo para a linha do x podemos ver que o p tem valor lógico **V** e o $\sim q$ tem tem valor lógico **V** também, logo x tem valor lógico **V**.
   E na **equivalência lógica** (também chamada de bicondicional) representada por $p \iff q$. A **equivalência** é **verdadeira** quando as duas proposições têm o mesmo valor lógico, ou seja p e q são ambas verdadeiras ou p e q são ambas falsas e isso só acontece para a linha do z onde $\sim p$ tem valor lógico **V** e q tem valor lógico **V**.

4. **Resposta :** A
   Temos a equação
   $$\log_2 m = \log_2 8 + \log_2 2$$
   Usamos a propriedade dos logaritmos
   $$\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(b \cdot c)$$
   Assim teremmos
   $$\log_2 m = \log_2 8 + \log_2 2$$
   $$\log_2 m = \log_2(8 \cdot 2)$$
   $$\log_2 m = \log_2 16$$
   Tendo uma equação agora em que temos a mesma base, podemos igualar os logaritimandos
   $$m = 16$$

5. **Resposta :** D
   Sendo uma expressão irracional e fracionaria temos que garantir que o radicando seja não negativo (mas como o índice é impar, então $x \in \mathbb{R}$) e denominador seja diferente de zero assim:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x-1} &\neq 0 \\ x-1 &\neq 0 \\ x &\neq 1 \end{aligned}$$

   Assim $D = \{x : x \in \mathbb{R} - \{1\}\}$.

6. **Resposta :** D

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 6 \\ [1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot k \cdot 2] - [1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot k \cdot 0] &= 6 \\ (1 + 2k) - 1 &= 6 \\ 2k &= 6 \\ k &= \frac{6}{2} \\ k &= 3 \end{aligned}$$

7. **Resposta :** B
   Simplifiquemos primeiro a inequação

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x+5} &\geq 2 \\ \frac{x-3}{x+5} - 2 &\geq 0 \\ \frac{x-3-2(x+5)}{x+5} &\geq 0 \\ \frac{x-3-2x-10}{x+5} &\geq 0 \\ \frac{-x-13}{x+5} &\geq 0 \end{aligned}$$

   Agora podemos fazer o estudo usando a tabela:

	$]-\infty\,; -13\,]$	-13	$[\,-13; -5\,[$	-5	$-5; +\infty$
$-x-13$	$+$	0	$-$		$-$
$x+5$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-x-13}{x+5}$	$-$		$+$		$-$

   Assim podemos ver que a função é positiva ou igual a zero no intervalo $[\,-13; -5\,[$.

8. **Resposta :** C

Temos aqui uma espécie que equação exponencial, resolvendo teremos:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2^{x+1}} &= 4 \\
(2^{x+1})^{\frac{1}{3}} &= 4 \\
\left[(2^{x+1})^{\frac{1}{3}}\right]^3 &= 4^3 \\
(2^{x+1})^{\frac{3}{3}} &= 4^3 \\
2^{x+1} &= 4^3 \\
2^{x+1} &= (2^2)^3 \\
2^{x+1} &= 2^6 \\
x+1 &= 6 \\
x &= 6-1 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

9. **Resposta :** D

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin x}{1-\sin x} + \frac{\sin x}{1+\sin x} \\
&= \frac{\sin x}{(1-\sin x)} \cdot \frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)} + \frac{\sin x}{1+\sin x} \cdot \frac{(1-\sin x)}{(1-\sin x)} \\
&= \frac{\sin x \cdot (1+\sin x) + \sin x \cdot (1-\sin x)}{1^2 - \sin^2 x} \\
&= \frac{\sin x + \sin^2 x + \sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cancel{\sin^2 x} + 2\sin x - \cancel{\sin^2 x}}{\cos^2 x} \\
&= \frac{2\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{2\tan x}{\cos x}
\end{aligned}$$

10. **Resposta :** A

Aplicação de trigometria no triângulo rectângulo, onde a rampa que ela subiu podemos considerar a hipotenusa e altura (h) que queremos determinar como o cateto oposto ao ângulo que fornecido. Para tal usamos a razão tringonometrica seno pois envolve esses dois lados do triângulo, dada por:

$$\sin\theta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Assim, substituindo os valores que temos:

$$\begin{aligned}
\sin 30 &= \frac{h}{40} \\
\frac{1}{2} \cdot 40 &= h \\
20 &= h
\end{aligned}$$

11. **Resposta :** D

A distância entre dois pontos x_1 e x_2 na recta real é dada pelo valor absoluto da diferença entre eles:

$$d = |x_2 - x_1|$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
|x-(-2)| &= 4 \\
|x+2| &= 4
\end{aligned}$$

12. **Resposta :** C
Para esse exercício, temos uma equação modular, e sabemos pela definição de módulo:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Aplicando essa definição teremos:

$$\begin{aligned} |3x - 1| &= 5 \\ 3x - 1 = 5 &\vee 3x - 1 = -5 \\ 3x - 1 + 1 = 5 + 1 &\vee 3x - 1 + 1 = -5 + 1 \\ 3x = 6 &\vee 3x = -4 \\ x = \frac{6}{3} &\vee x = -\frac{4}{3} \\ x = 2 &\vee x = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

13. **Resposta :** B
Como os calçados do mesmo tipo devem ficar, vamos tratar em blocos ou seja um bloco de sapatos e um bloco de chinelos logo teremos. Os blocos podem ser organizados de $2! = 2$. Já estamos a tratar cada para como um bloco logo, temos dois pares de sapato mas eles podem mudar de lugar entre si $(2! = 2)$ mas sem serem separados assim como os chinelos $(3! = 6)$. Pelo principio multiplicativo $2 \times 2 \times 6 = 24$.

14. **Resposta :** C
Como precisamos formar números de 3 algarismos diferentes escolhidos de um conjuno de 5 elementos, temos um problema de arranjos simples que é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Substituindo teremos:

$$\begin{aligned} A_3^5 &= \frac{5!}{(5-3)!} \\ &= \frac{5!}{2!} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} \\ &= 60 \end{aligned}$$

15. **Resposta :** C
Como os três digitos devem ser diferentes e não podemos repetir nenhum, então para o primeiro dígito tem nove (9) possibilidades (qualquer um dos algarismos de 1 a 9), o segundo dígito tem oito (8) possibilidades (qualquer um dos restantes, excepto o já usado) e o terceiro tem sete (7) posssibilidades (ualquer um dos restantes, excepto os dois já usados) pelo principio multiplicativo teremos $9 \times 8 \times 7 = 504$.

16. **Resposta :** C
Temos aqui um problema de probabilidade, onde temos casos possíveis as 6 faces, sabemos que as faces estão numeradas de 1 a 6, então os números pares compreendidos neste intervalo são 2, 4 e 6. Fazendo assim com que o número de casos favoráveis seja 3 e pela definição de probabilidade

$$P = \frac{\textbf{Casos favoráveis}}{\textbf{Casos possíveis}}$$

Substituindo, teremos:

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

17. **Resposta :** D
Este é um problema de probabilidade onde temos casos possíveis as 10 bolas, e ao retirarmos uma bola ao acaso e essa bola não ser a número 7 temos então 9 casos favoráveis. Então pela definição de probabilidade

$$P = \frac{\textbf{Casos favoráveis}}{\textbf{Casos possíveis}}$$

Substituindo, teremos:

$$P = \frac{9}{10}$$

18. **Resposta :** A
Uma função $f(x)$ é dita par se:

$$f(-x) = f(x)$$

E é dita ímpar se

$$f(-x) = -f(x)$$

Então, para a nossa função $f(x) = \cos x + 2$ teremos:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) + 2 \\ f(-x) &= \cos x + 2 \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

A função cos é uma função par, o que faz com que a nossa função também seja par, aplicando a definição de paridade.

19. **Resposta :** D
A função cosseno é uma função limitada, ou seja

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Então, podemos manipular de tal modo a obter a $f(x)$:

$$\begin{gathered} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 + 2 \leq \cos x + 2 \leq 1 + 2 \\ 1 \leq f(x) \leq 3 \end{gathered}$$

20. **Resposta :** C
Temos que $f(x - \frac{\pi}{2})$ é uma translação horizontal da função seno para a direita. Então, como $x - \dfrac{\pi}{2} \in [-\pi; \pi]$ adicionando $\dfrac{\pi}{2}$ teremos $x \in \left[-\pi + \dfrac{\pi}{2}; \pi + \dfrac{\pi}{2}\right] \implies x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

21. **Resposta :** A
Uma função diz se contínua se a função no ponto for igual ao limite da função naquele ponto, ou seja:

$$f(a) = \lim_{x \to a}$$

Neste caso gererico, a função é contínua no ponto a. Assim, podemos detreminar a continuidade para a função dada. Para a função no ponto, no caso $x = -1$ temos:

$$\begin{aligned} g(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + k \\ &= 3 + 4 + k \\ &= 7 + k \end{aligned}$$

Então para que exista limite, temos que garantir que os limites laterais sejam iguais ou seja:

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^+} g(x)$$

Assm, teremos:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} 3x^2 - 4x + k$$
$$= 7 + k$$

Por outro lado:

$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x+3}{x}$$
$$= -1$$

Logo:

$$\begin{aligned} 7 + k &= -1 \\ k &= -1 - 7 \\ k &= -8 \end{aligned}$$

22. **Resposta :** C
Sabemos duma PA (progressão aritmetica) que a razão (d) desta é constante ou seja:

$$d = a_{n+1} - a_n$$

No entanto aplicando esse conhecimento, sabendo que a razão é constante então:

$$d = (4p - 3) - (3p - 4) = 4p - 3 - 3p + 4 = p + 1$$

De mesmo modo temos:

$$d = (7p - 6) - (4p - 3) = 7p - 6 - 4p + 3 = 3p - 3$$

Desta feita sabemos que a razão é a mesma então podemos igualar ambas assim teremos:

$$\begin{aligned} p + 1 &= 3p - 3 \\ 1 + 3 &= 3p - p \\ 4 &= 2p \\ p &= \frac{4}{2} \\ p &= 2 \end{aligned}$$

23. **Resposta :** D
Temos uma progressão geométrica com o termo $a_7 = 192$ e $a_2 = 6$ então para achar os três primeiros termos, podemos achar o termo geral. Para tal podemos determinar o termo geral de uma PG que é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Então, podemos ver que precisamos do primeiro termo e da razão podemos montar um sistema usando os termos já fornecidos:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 \cdot q^{7-1} \\ a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \end{cases} \implies \begin{cases} a_6 = a_1 \cdot q^6 \\ a_2 = a_1 \cdot q \end{cases} \implies \begin{cases} 192 = a_1 \cdot q \cdot q^5 \\ 6 = a_1 \cdot q \end{cases} \implies \begin{cases} 192 = 6 \cdot q^5 \\ 6 = a_1 \cdot q \end{cases} \implies \begin{cases} 32 = q^4 \\ 6 = a_1 \cdot q \end{cases} \implies$$
$$\begin{cases} 2 = q \\ 6 = a_1 \cdot q \end{cases} \implies \begin{cases} 2 = q \\ 3 = a_1 \end{cases}$$

Então, o a_3 será dado por:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \implies a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

24. **Resposta :** A
Quando nos aproximamos de zero vindo pela esquerda do 1, podemos ver que o gráfico tende para zero.

25. **Resposta :** C
Calculemos o limite, substituindo a tendência:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\\ &= \frac{1-\cos 0}{0^2}\\ &= \left[\frac{0}{0}\right]\end{aligned}$$

Levantando a indeterminação:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1^2-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{x\cdot x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= \frac{1}{1+\cos 0}\\ &= \frac{1}{1+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

26. **Resposta :** D
É o gráfico que representa melhor a situação, pois quando nos aproximamos de zero, o gráfico tende para o menos infinito e quando os valores de x tendem para o infinito o nosso gráfico se aproxima do zero.

27. **Resposta :** A
Uma função diz se contínua se a função no ponto for igual ao limite da função naquele ponto, ou seja:

$$f(a) = \lim_{x\to a}$$

Neste caso gererico, a função é contínua no ponto a. Assim, podemos detreminar a continuidade para a função dada. Para a função no ponto, no caso $x = 1$ temos:

$$\begin{aligned}f(1) &= -1^2+1\\ &= 0\end{aligned}$$

Então para que exista limite, temos que garantir que os limites laterais sejam iguais ou seja:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x)$$

Assm, teremos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} -x^2+1\\ &= 0\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} 2x+m\\ &= 2+m\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}2+m &= 0\\ m &= 0-2\\ m &= -2\end{aligned}$$

28. **Resposta :** D
A derivada $f'(0)$ representa o valor da inclinação da recta tangente ao gráfico no ponto $x=0$. Mas pelo gráfico, a função não está definida nesse ponto pois há uma assimptota vertical, de ambos lados a função tende para infinito logo, a função não é contínua nesse ponto o que faz com que a $f'(0)$ não exista.

29. **Resposta :** B
Calculemos a primeira derivada da função $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ aplicando a regra do quociente.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x^2}{\ln x}\right)'\\ &= \frac{(x^2)'\cdot\ln x - x^2\cdot(\ln x)'}{\ln^2 x}\\ &= \frac{2x\cdot\ln x - x^2\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}\\ &= \frac{2x\cdot\ln x - x}{\ln^2 x}\\ &= \frac{x(2\cdot\ln x-1)}{\ln^2 x}\end{aligned}$$

30. **Resposta :** NENHUMA DAS ALTERNATIVAS
Seja $f(u)=\ln u$ uma função, a derivada é dada por:

$$f'(u)=\frac{u'}{u}$$

Assim, a derivada de $f(x)=\ln(x^2-1)$ é:

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}$$

31. **Resposta :** B
Temos que $f(x)=\cos x$ então a primeira derivada:

$$f'(x)=-\sin x$$

e a segunda derivada

$$f''(x)=-\cos x$$

32. **Resposta :** A
Se $y=3x$ é tangente ao gráfico da função $f(x)$ em $x=1$ então:

   (a) $f(1)=3(1)=3$, quer dizer o ponto $(1;3)$ pertence a função
   (b) $f'(1)=3$ a derivada da função nesse ponto deve ser igual à inclinação da recta tangente.

33. **Resposta :** C

A equação reduzida da recta é dada por:

$$y=ax+b$$

Onde a é o coeficiente angular, para o nosso exercício vale 2. Então podemos reescrever a equação da recta como:

$$y = 2x + b$$

Sendo que está passa pelo ponto $P(-3; 2)$ então:

$$\begin{aligned} 2 &= 2(-3) + b \\ 2 &= -6 + b \\ 2 + 6 &= b 8 = b \end{aligned}$$

Assima equação reduzida da recta será dada por:

$$y = 2x + 8$$

E para equação geral

$$2x - y + 8 = 0$$

34. **Resposta :** D
 Aqui é aplicação da derivada. Para saber onde a função $f(x)$ é crescente analisamos $f'(x) > 0$. Então, temos que $f'(x) = 3x^2 - 12$ analisando a derivada $3x^2 - 12 > 0 \implies x^2 - 4 > 0 \implies x < -2 \vee x > 2$.

35. **Resposta :** C
 O gráfico é uma parábola que sofreu uma transformação devido ao módulo. Com ordenada na origem era -4 passando a ser 4 e tinha zeros da função -2 e 2.

36. **Resposta :** C
 Função linear que sofre transformação, no qual tinha ordenada na origem 1, zero da função 1 e era descrescente devido ao coeficiente angular negativo.

37. **Resposta :** C
 Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ a nossa função, temos que a primitiva será dada por:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{1}{x^2}dx \\ &= \int x^{-2}dx \\ &= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} \\ &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

38. **Resposta :** D

$$\int (e^x - 1)dx$$

$$\begin{aligned} &= \int e^x dx - \int 1 dx \\ &= e^x - x + C \end{aligned}$$

39. **Resposta :** C

$$\begin{aligned} \sqrt{-4} &= \sqrt{4 \cdot (-1)} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \\ &= 2\sqrt{-1} \\ &= 2i \end{aligned}$$

40. **Resposta :** B
Sendo z o número complexo, simplifiquemos primeiro de modo a facilitar o procedimento:

$$\begin{aligned} z &= (3+i)-(2+5i) \\ &= 3+i-2-5i \\ &= 3-2+i-5i \\ &= 1-4i \end{aligned}$$

Assim o conjugado representado por $\bar{z}$ será:

$$\bar{z} = 1+4i$$