# Resoluções de Exame de Admissao UJC 2023

–

–

Resoluções de Matemática

September 23, 2025

*Bem-vindo(a) à nossa aplicação de preparação para exames! Chegou a hora de se destacar nos seus testes e conquistar o sucesso acadêmico que você merece. Apresentamos o "Guião de Exames Resolvidos": a sua ferramenta definitiva para uma preparação eficaz e resultados brilhantes!*

## Questão 1

**Enunciado:** Racionalizando o denominador da expressão

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}},$$

tem-se:

[A.] $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{2}$ $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$

**Resolução:**
Temos:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}}.$$

Para racionalizar o denominador, multiplicamos numerador e denominador por $\sqrt[3]{4}$:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}}.$$

Como $\sqrt[3]{8} = 2$, obtemos:

$$\frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}.$$

$\boxed{\text{Alternativa B}}$

## Questão 2

**Enunciado:** O valor da expressão

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$$

é:

[A.]10 25 $10 - 2\sqrt{6}$ $6 - 2\sqrt{5}$

**Resolução:**
Expandindo o quadrado:

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = (3+\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5}) + 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}.$$

Simplificando os termos:

$$= 6 + 2\sqrt{9-5}.$$

$$= 6 + 2\sqrt{4}.$$

$$= 6 + 2 \cdot 2 = 6 + 4 = 10.$$

$\boxed{\text{Alternativa A}}$

## Questão 3

**Enunciado:**
São dados os números

$$x = 0,00375 \times 10^{-6}, \quad y = 22,5 \times 10^{-8}.$$

É correto afirmar que:

[A.]$y = \dfrac{6x}{100}$ $x = 60y$ $y = 60x$ $x = 2y/3$

**Resolução:**
Primeiro, escrevemos os números em notação científica:

$$x = 0,00375 \times 10^{-6} = 3,75 \times 10^{-3} \times 10^{-6} = 3,75 \times 10^{-9},$$

$$y = 22,5 \times 10^{-8} = 2,25 \times 10^{1} \times 10^{-8} = 2,25 \times 10^{-7}.$$

Agora, calculamos a razão:

$$\frac{y}{x} = \frac{2,25 \times 10^{-7}}{3,75 \times 10^{-9}} = \frac{2,25}{3,75} \times 10^{(-7)-(-9)}.$$

$$= 0,6 \times 10^2 = 60.$$

Logo,

$$y = 60x.$$

$$\boxed{\text{Alternativa C}}$$

# Questão 4

**Enunciado:** O sistema logarítmico

$$\begin{cases} \log_2(x) - \log_2(y) = 3, \\ 2\log_2(x) + \log_2(y) = 0, \end{cases}$$

é equivalente ao sistema:

[A.]$\{\, y = 8x \quad \text{e} \quad x^2y = 1 \,\}$ $\{\, x = 8y \quad \text{e} \quad xy^2 = 1 \,\}$ $\{\, x = 8y \quad \text{e} \quad x^2y = 1 \,\}$ $\{\, x = x - y = 8 \quad \text{e} \quad x^2 + y = 1 \,\}$

**Resolução:**
Da primeira equação, usando a propriedade dos logaritmos,

$$\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{y} = 2^3 = 8$$

ou seja

$$x = 8y.$$

Da segunda equação,

$$2\log_2(x) + \log_2(y) = \log_2(x^2) + \log_2(y) = \log_2(x^2y) = 0$$

logo

$$x^2y = 2^0 = 1.$$

Portanto o sistema é equivalente a

$$\{\, x = 8y,\ x^2y = 1 \,\}.$$

$$\boxed{\text{Alternativa C}}$$

# Questão 5

**Enunciado:** Um retângulo possui lados proporcionais a 3 e 4, sabendo que a sua área é de $1728\,\text{cm}^2$. O perímetro desse retângulo é:

[A.]168 cm 145 cm 152 cm 128 cm

**Resolução:**

Se os lados estão na razão $3 : 4$, seja $3k$ e $4k$ os comprimentos dos lados do retângulo. A área é:

$$A = (3k)(4k) = 12k^2.$$

Dado que $A = 1728$, temos:

$$12k^2 = 1728 \quad \Longrightarrow \quad k^2 = \frac{1728}{12} = 144 \quad \Longrightarrow \quad k = 12.$$

Logo, os lados medem:

$$3k = 36 \quad \text{e} \quad 4k = 48.$$

O perímetro é:

$$P = 2(36 + 48) = 2 \cdot 84 = 168\,\text{cm}.$$

$$\boxed{\text{Alternativa A}}$$

# Questão 6

**Enunciado:** Dois círculos $C_1$ e $C_2$ possuem raios com medidas $3x$ e $x + 5$ (cm), respectivamente. Sabe-se que a razão entre os comprimentos de $C_1$ e $C_2$ é igual a 2. Dessa forma, é correto afirmar que as áreas de $C_1$ e $C_2$ valem, em $\text{cm}^2$, respectivamente:

[A.]$900\pi$ e $225\pi$ $920\pi$ e $240\pi$ $905\pi$ e $255\pi$ $900\pi$ e $225\pi$

**Resolução:**

O comprimento de uma circunferência de raio $r$ é $C = 2\pi r$. Para $C_1$ e $C_2$:

$$C_1 = 2\pi(3x) = 6\pi x, \qquad C_2 = 2\pi(x + 5).$$

Dado $\dfrac{C_1}{C_2} = 2$, temos

$$\frac{6\pi x}{2\pi(x+5)} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x}{x+5} = 2.$$

Resolvendo:

$$3x = 2(x + 5) \Rightarrow 3x = 2x + 10 \Rightarrow x = 10.$$

Os raios valem:

$$r_1 = 3x = 30, \qquad r_2 = x + 5 = 15.$$

As áreas são:

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot 30^2 = 900\pi, \qquad A_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi.$$

$$\boxed{\text{Alternativa A: } 900\pi \text{ e } 225\pi.}$$

## Questão 7

**Enunciado:** Um fabricante de cestos ganha 3 MZN por cada cesto que fabrica sem defeito e perde 5 MZN por cada cesto que fabrica com defeito. Em uma semana, ele fabricou 160 cestos e obteve um lucro de 400 MZN. Quantos cestos com defeito foram fabricados?

[A.]15 13 12 10

**Resolução:**
Seja:

$$x = \text{número de cestos sem defeito}, \quad y = \text{número de cestos com defeito}.$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 160, \\ 3x - 5y = 400. \end{cases}$$

Substituindo $x = 160 - y$ na segunda equação:

$$3(160 - y) - 5y = 400$$

$$480 - 3y - 5y = 400$$

$$480 - 8y = 400$$

$$-8y = -80$$

$$y = 10$$

$$\boxed{\text{Alternativa D}}$$

## Questão 8

**Enunciado:** Considere o polinômio

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + mx + n, \quad m, n \in \mathbb{R}.$$

Determine os valores de $m$ e $n$ sabendo que: 1. $P(x)$ é divisível por $x + 3$. 2. O resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é 28.

[A.]$m = 4$ e $n = 33$ $m = -4$ e $n = -33$ $m = -4$ e $n = 33$ $m = 4$ e $n = -33$

**Resolução:**
1. Como $x + 3$ divide $P(x)$, temos:

$$P(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 + m(-3) + n = 0$$

$$-27 - 18 - 3m + n = 0 \quad \Longrightarrow \quad -45 - 3m + n = 0$$

$$n = 3m + 45$$

2. O resto da divisão por $x - 1$ é:

$$P(1) = 1 - 2 + m + n = -1 + m + n = 28$$

$$m + n - 1 = 28 \quad \Longrightarrow \quad m + n = 29$$

3. Substituindo $n = 3m + 45$:

$$m + (3m + 45) = 29 \quad \Longrightarrow \quad 4m + 45 = 29$$

$$4m = -16 \quad \Longrightarrow \quad m = -4$$

4. Logo:

$$n = 3(-4) + 45 = -12 + 45 = 33$$

$$\boxed{\text{Alternativa C: } m = -4,\ n = 33}$$

# Questão 9

**Enunciado:** O piso de uma sala possui a forma de um paralelogramo. Os lados medem 10 m e 20 m, e o ângulo entre eles é de 45°. Considerando $\sqrt{2} \approx 1,420$, a área desse piso, em metros quadrados, é:

[A.]14,1 120 1410 141

**Resolução:**
A área de um paralelogramo é dada por:

$$A = ab \sin \theta,$$

onde $a$ e $b$ são os lados e $\theta$ é o ângulo entre eles.
Substituindo os valores:

$$A = 10 \cdot 20 \cdot \sin 45^\circ = 200 \cdot \sin 45^\circ.$$

Sabemos que $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}420}{2} = 0,71$.

$$A \approx 200 \cdot 0,71 = 142\,\mathrm{m}^2 \approx 141\,\mathrm{m}^2 \text{ (aproximação)}$$

$$\boxed{\text{Alternativa D: 141}}$$

# Questão 10

**Enunciado:** Determine o domínio de existência da função real

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-7}}.$$

[A.]$] - 7, +\infty[$ $[7, +\infty[$ $]1, 3/2]$ $] - \infty, 2]$

**Resolução:**
Para que $f(x)$ seja definida, precisamos que:
1. O radicando do numerador seja $\geq 0$:

$$x - 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 2.$$

2. O radicando do denominador seja $> 0$ (não pode ser zero):

$$x - 7 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > 7.$$

Portanto, o domínio é:

$$x > 7 \quad \Longrightarrow \quad [7, +\infty[.$$

$$\boxed{\text{Alternativa B}}$$

## Questão 11

**Enunciado:** Considerando que a distância entre o ponto $P(K, 4)$ e a reta $R$ de equação

$$6x + 8y - 80 = 0$$

é igual a 6 unidades, calcule o valor da coordenada $K$.

[A.]$K = 18$ ou $K = 2$ $K = -18$ ou $K = 2$ $K = -18$ ou $K = -2$ $K = 18$ ou $K = -2$

**Resolução:**
A distância de um ponto $(x_0, y_0)$ a uma reta $Ax + By + C = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Substituindo os valores:

$$6 = \frac{|6K + 8 \cdot 4 - 80|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|6K + 32 - 80|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{|6K - 48|}{10}.$$

Multiplicando ambos os lados por 10:

$$60 = |6K - 48|.$$

Resolvendo o módulo:

$$6K - 48 = 60 \quad \text{ou} \quad 6K - 48 = -60.$$

1. $6K - 48 = 60 \Longrightarrow 6K = 108 \Longrightarrow K = 18$ 2. $6K - 48 = -60 \Longrightarrow 6K = -12 \Longrightarrow K = -2$

$$\boxed{\text{Alternativa D: } K = 18 \text{ ou } K = -2}$$

# Questão 12

**Enunciado:** Determine o valor de $k$ para que as retas

$$R : -\frac{1}{3}x + y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad S : y - kx - 2 = 0$$

sejam perpendiculares.

[A.]$k = -3$ $k = -\frac{1}{3}$ $k = \frac{1}{3}$ $k = 3$

**Resolução:**
1. Determinar os coeficientes angulares ($m$) das retas:

$$R : -\frac{1}{3}x + y + 1 = 0 \implies y = \frac{1}{3}x - 1 \quad \Rightarrow m_R = \frac{1}{3}$$

$$S : y - kx - 2 = 0 \implies y = kx + 2 \quad \Rightarrow m_S = k$$

2. Para que duas retas sejam perpendiculares:

$$m_R \cdot m_S = -1$$

Substituindo:

$$\frac{1}{3} \cdot k = -1 \quad \Rightarrow \quad k = -3$$

$$\boxed{\text{Alternativa A: } k = -3}$$

# Questão 13

**Enunciado:** Qual das expressões abaixo é algébrica e irracional?

[A.]$\sqrt{x-3}$ $\frac{\sqrt{2}}{4+x}$ $\frac{2x-3}{4x}$ $x + 7$

**Resolução:**
- Uma expressão **algébrica** é formada por operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e radiciação envolvendo números e variáveis. - Uma expressão **irracional** contém raiz de índice par de uma expressão que não pode ser simplificada para um número racional.

Analisando cada alternativa:
1. $\sqrt{x-3} \to$ raiz quadrada de uma expressão com variável $\to$ **algébrica e irracional**. 2. $\frac{\sqrt{2}}{4+x} \to$ raiz quadrada de constante ($\sqrt{2}$) dividida por expressão $\to$ **irracional, mas não algébrica em relação a $x$**. 3. $\frac{2x-3}{4x} \to$ apenas fração de polinômios $\to$ **racional**. 4. $x + 7 \to$ polinômio $\to$ **racional**.

$$\boxed{\text{Alternativa A: } \sqrt{x-3}}$$

# Questão 14

**Enunciado:** Considere a parábola de equação

$$y = x^2 - 4x + n.$$

Determine o valor de $n$ para que a abscissa e a ordenada do vértice da parábola sejam iguais.

[A.]-14 -10 6 2

**Resolução:**
1. O vértice de uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ tem coordenadas:

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = ax_v^2 + bx_v + c.$$

2. Aqui, $a = 1$, $b = -4$, $c = n$.

$$x_v = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

3. Coordenada $y$ do vértice:

$$y_v = (2)^2 - 4(2) + n = 4 - 8 + n = n - 4$$

4. Para que abscissa e ordenada sejam iguais:

$$x_v = y_v \implies 2 = n - 4 \implies n = 6$$

$$\boxed{\text{Alternativa C: } n = 6}$$

# Questão 15

**Enunciado:** Se $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ e $\frac{1}{C}$ estiverem, nessa ordem, em progressão aritmética, então $B$ é dado por:

[A.]$B = \frac{2AC}{A+C}$ $B = \frac{2AC}{A-C}$ $B = \frac{2A}{A+C}$ $B = \frac{2AC}{A-C}$

**Resolução:**
1. Se três números $x_1, x_2, x_3$ estão em progressão aritmética (PA):

$$2x_2 = x_1 + x_3$$

2. Aplicando para $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$:

$$2 \cdot \frac{1}{B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{C}$$

$$\frac{2}{B} = \frac{C + A}{AC} \implies B = \frac{2AC}{A + C}$$

$$\boxed{\text{Alternativa A: } B = \frac{2AC}{A + C}}$$

# Questão 16

**Enunciado:** Calcule o valor da expressão

$$\frac{1+3+5+\cdots+19}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{512}}$$

aproximando às milésimas.

[A.]50,049 50,048 40,049 40,048

**Resolução:**

1. Numerador: soma dos 10 primeiros números ímpares $(1, 3, 5, \ldots, 19)$:

$$S_n = n^2, \quad n = 10 \implies S_{10} = 10^2 = 100$$

2. Denominador: soma de uma progressão geométrica $(a = 1, r = \frac{1}{2}, n = 10)$:

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = 1 \cdot \frac{1-(1/2)^{10}}{1-1/2} = \frac{1-1/1024}{1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{1024}\right) \approx 2 \cdot 0,999023 = 1,998046$$

3. Valor da expressão:

$$\frac{100}{1,998046} \approx 50,048$$

$$\boxed{\text{Alternativa B: } 50,048}$$

# Questão 17

**Enunciado:** Determine a equação da reta tangente à curva

$$f(x) = \sqrt{x}$$

no ponto de abscissa $x_0 = 9$.

[A.]$x + 6y + 9 = 0$ $x - 6y + 9 = 0$ $x - 6y - 9 = 0$ $x + 6y - 9 = 0$

**Resolução:**

1. Derivada da função:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Valor da derivada em $x_0 = 9$:

$$f'(9) = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

3. Coordenadas do ponto na curva:

$$(9, f(9)) = (9, 3)$$

4. Equação da reta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 3 = \frac{1}{6}(x - 9)$$

5. Multiplicando ambos os lados por 6 para eliminar denominador:

$$6y - 18 = x - 9 \implies x - 6y + 9 = 0$$

$$\boxed{\text{Alternativa B: } x - 6y + 9 = 0}$$

# Questão 18

**Enunciado:** Calcule o valor do limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

[A.]$\sqrt{e^3}$ $e^3$ $\sqrt{e^{-3}}$ $e^{-3}$

**Resolução:**
1. Reescrevendo a expressão para usar a forma padrão de limite exponencial:

$$\left(1-\frac{3}{n}\right)^{\sqrt{n}}=\left[\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}\right]^{1/\sqrt{n}}.$$

2. Sabemos que $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n=e^{-3}$.
3. A expressão original então se torna:

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{-3}\right)^{1/\sqrt{n}}=e^{-3\cdot 0}=e^0=1.$$

**Observação:** Para confirmar, vamos usar substituição $k=\sqrt{n}$, então $n=k^2$:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{3}{k^2}\right)^{k}=\lim_{k\to\infty}e^{-3/k}=e^0=1.$$

$$\boxed{1}$$

**Nota:** Nenhuma das alternativas originais corresponde a este resultado; o limite correto é 1.

# Questão 19

Dos 1150 alunos de uma escola, 654 gostam de Português, 564 gostam de Matemática, e 176 não gostam de Português nem de Matemática. Sendo assim, o número de alunos que gostam de Português e de Matemática é:

[A.]288 266 222 244

**Resolução:**

1. Primeiro, encontramos o número de alunos que gostam de pelo menos uma das duas disciplinas:

$$|P\cup M|=1150-176=974.$$

(subtraímos os que não gostam de nenhuma)

2. Aplicamos a fórmula da união de dois conjuntos:

$$|P\cup M|=|P|+|M|-|P\cap M|.$$

Substituindo os valores:

$$974=654+564-|P\cap M|.$$

3. Calculando:

$$974 = 1218 - |P \cap M| \implies |P \cap M| = 1218 - 974 = 244.$$

$$\boxed{\text{Resposta: D. 244}}$$

# Questão 22

Calcule o valor de $k$, na equação

$$x^2 - kx + 36 = 0,$$

de modo que uma das raízes seja o quádruplo da outra.

[A.]$k = 15$ e $k = -15$ $k = 10$ e $k = -15$ $k = -15$ e $k = -10$ $k = 15$ e $k = 10$

**Resolução:**

1. Seja $\alpha$ e $\beta$ as raízes, com $\alpha = 4\beta$.

2. Pelo produto das raízes:
$$\alpha \cdot \beta = 36.$$
Substituímos $\alpha = 4\beta$:
$$4\beta \cdot \beta = 36 \implies 4\beta^2 = 36 \implies \beta^2 = 9.$$
Logo, $\beta = \pm 3$. - Se $\beta = 3$, então $\alpha = 12$. - Se $\beta = -3$, então $\alpha = -12$.

3. Pela soma das raízes:
$$\alpha + \beta = k.$$
- Caso 1: $\alpha = 12, \beta = 3 \implies k = 15$. - Caso 2: $\alpha = -12, \beta = -3 \implies k = -15$.

$$\boxed{\text{Resposta: A. } k = 15 \text{ e } k = -15}$$

# Questão 23

Qual é a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{4x^3 + 3x}{5 - 3x^3}?$$

[A.]$y = \frac{4}{5}$ $y = -\frac{4}{5}$ $y = \frac{4}{3}$ $y = -\frac{4}{3}$

**Resolução passo a passo:**

1. **Identificar o grau do numerador e do denominador:**
   - Numerador: $4x^3 + 3x \rightarrow$ grau 3

- Denominador: $5 - 3x^3 \to$ grau 3

Como os graus são iguais, a assíntota horizontal existe e é a razão dos coeficientes líderes.

2. **Coeficientes líderes:**

$$\text{Numerador: } 4, \quad \text{Denominador: } -3$$

3. **Calcular a assíntota horizontal:**

$$y = \frac{\text{coeficiente do numerador}}{\text{coeficiente do denominador}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}.$$

$$\boxed{\text{Resposta: D. } y = -\frac{4}{3}}$$

# Questão 24

Determine a assíntota oblíqua da função

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 2}{x - 1}.$$

[A.]$y = 3x - 3$ $y = -3x + 3$ $y = -3x - 3$ $y = 3x + 3$

**Resolução passo a passo:**

1. A função é uma razão entre polinômios em que o grau do numerador (2) é maior que o grau do denominador (1), logo existe uma assíntota oblíqua.

2. Para encontrar a assíntota oblíqua, fazemos a divisão do numerador pelo denominador:
$$\frac{-3x^2 + 2}{x - 1}.$$

3. Dividindo $-3x^2 + 0x + 2$ por $x - 1$:
   - $-3x^2/x = -3x \to$ multiplicamos $-3x(x - 1) = -3x^2 + 3x$
   - Subtraímos: $(-3x^2 + 0x) - (-3x^2 + 3x) = -3x$
   - Dividimos $-3x/x = -3 \to$ multiplicamos: $-3(x - 1) = -3x + 3$
   - Subtraímos: $-3x + 2 - (-3x + 3) = -1$ (resto irrelevante para a assíntota)

4. A assíntota oblíqua é dada pelo quociente da divisão:

$$y = -3x - 3.$$

$$\boxed{\text{Resposta: C. } y = -3x - 3}$$

# Questão 25

Seja $f(x) = ax + 2$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(f(1)) = 1$, determine o valor de $a$.

[A.]$a = 1$ $a = -1$ $a = \frac{1}{2}$ $a = -\frac{1}{2}$

**Resolução passo a passo:**

1. Primeiro, calculamos $f(1)$:

$$f(1) = a \cdot 1 + 2 = a + 2$$

2. Agora, calculamos $f(f(1))$:

$$f(f(1)) = f(a + 2) = a(a + 2) + 2 = a^2 + 2a + 2$$

3. Sabemos que $f(f(1)) = 1$, então:

$$a^2 + 2a + 2 = 1$$

4. Resolvendo a equação quadrática:

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \implies (a + 1)^2 = 0 \implies a = -1$$

$$\boxed{\text{Resposta: B. } a = -1}$$

# Questão 26

Determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de modo que as retas tangentes à função

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sejam $y = 14x - 13$ no ponto $(1, 1)$ e $y = -2x - 5$ no ponto $(-1, -3)$.

[A.]$a = 2, b = 4, c = 0, d = -5$ $a = 2, b = 4, c = 0, d = 5$ $a = -2, b = 4, c = 0, d = -5$ $a = 2, b = 4, c = 1, d = -5$

**Resolução passo a passo:**

1. A derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

2. Condições das tangentes:

   - No ponto $(1, 1)$, a reta tangente tem equação $y = 14x - 13$:

$$f(1) = 1 \implies a + b + c + d = 1$$

$$f'(1) = 14 \implies 3a + 2b + c = 14$$

- No ponto $(-1, -3)$, a reta tangente tem equação $y = -2x - 5$:

$$f(-1) = -3 \implies -a + b - c + d = -3$$

$$f'(-1) = -2 \implies 3a - 2b + c = -2$$

3. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 14 \\ -a + b - c + d = -3 \\ 3a - 2b + c = -2 \end{cases}$$

4. Da equação $3a + 2b + c = 14$ e $3a - 2b + c = -2$, subtraímos:

$$(3a + 2b + c) - (3a - 2b + c) = 14 - (-2) \implies 4b = 16 \implies b = 4$$

5. Substituindo $b = 4$ em $3a + 2b + c = 14$:

$$3a + 8 + c = 14 \implies 3a + c = 6 \implies c = 6 - 3a$$

6. De $3a - 2b + c = -2$:

$$3a - 8 + c = -2 \implies 3a + c = 6 \implies c = 6 - 3a$$

De $a + b + c + d = 1$:

$$a + 4 + (6 - 3a) + d = 1 \implies a + 4 + 6 - 3a + d = 1$$

$$-2a + 10 + d = 1 \implies d = 1 + 2a - 10 = 2a - 9$$

De $-a + b - c + d = -3$:

$$-a + 4 - (6 - 3a) + (2a - 9) = -3$$

$$-a + 4 - 6 + 3a + 2a - 9 = -3 \implies (4a) + (-11) = -3 \implies 4a = 8 \implies a = 2$$

Então:

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 6 - 3a = 6 - 6 = 0, \quad d = 2a - 9 = 4 - 9 = -5$$

$$\boxed{\text{Resposta: A: } a = 2, b = 4, c = 0, d = -5}$$

# Questão 27

O diagrama circular representa os alunos de diferentes classes de uma escola privada. Sabe-se que a escola possui 10 alunos da 11ª classe. As porcentagens das classes são:

- 8ª classe: 60%
- 11ª classe: 6%
- 10ª classe: 11%
- 9ª classe: 23%

Determine o número total de alunos da escola. Arredonde para números inteiros.

[A.]150 156 160 167

**Resolução passo a passo:**

1. Sabemos que 11ª classe representa 6% do total de alunos:

$$6\% \times N = 10 \implies 0,06N = 10$$

2. Calculamos o total de alunos $N$:

$$N = \frac{10}{0,06} \approx 166,666 \approx 167$$

$$\boxed{\text{Resposta: D. 167}}$$

# Questão 28

O diagrama circular representa os alunos de diferentes classes de uma escola privada. Sabe-se que a escola possui 10 alunos da 11ª classe e que as porcentagens das classes são:

- 8ª classe: 60%
- 11ª classe: 6%
- 10ª classe: 11%
- 9ª classe: 23%

Determine o número de alunos da 8ª classe. Arredonde para números inteiros.

[A.]114 115 116 117

**Resolução passo a passo:**

1. Primeiro, encontramos o total de alunos $N$ usando a informação da 11ª classe:

$$6\% \times N = 10 \implies N = \frac{10}{0,06} \approx 166,666 \approx 167$$

2. Calculamos o número de alunos da 8ª classe (60% do total):

$$0,60 \times 167 \approx 100,2 \approx 100$$

$$\boxed{\text{Resposta: 100}}$$

**Observação:** Nenhuma das alternativas fornecidas (114,115,116,117) coincide exatamente com o cálculo correto baseado na porcentagem. O valor correto arredondado é 100 alunos.

# Questão 29

O diagrama circular representa os alunos de diferentes classes de uma escola privada. Sabe-se que a escola possui 10 alunos da 11ª classe e que as porcentagens das classes são:

- 8ª classe: 60%
- 11ª classe: 6%
- 10ª classe: 11%
- 9ª classe: 23%

Determine o número de alunos da 9ª classe. Arredonde para números inteiros.

[A.]22 23 24 25

**Resolução passo a passo:**

1. Primeiro, encontramos o total de alunos $N$ usando a informação da 11ª classe:

$$6\% \times N = 10 \implies N = \frac{10}{0,06} \approx 166,666 \approx 167$$

2. Calculamos o número de alunos da 9ª classe (23% do total):

$$0,23 \times 167 \approx 38,41 \approx 38$$

$$\boxed{\text{Resposta correta: 38 alunos}}$$

**Observação:** Nenhuma das alternativas fornecidas (22,23,24,25) coincide exatamente com o cálculo correto baseado na porcentagem. O valor correto arredondado é 38 alunos.

## Questão 30

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$$

sabendo que o determinante dela igualado a zero fornece a equação da reta que passa pelos pontos $(2, 3)$ e $(4, 6)$, determine a equação da reta.

[A.]$3x + 2y = 0$ $x - 3y = 0$ $-3x + 2y = 0$ $-2x + y = 0$

**Resolução passo a passo:**

1. O determinante da matriz é:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. Calculamos o determinante pela regra de Sarrus ou expansão por cofatores:

$$\det(A) = 2(6 \cdot 1 - 1 \cdot y) - 3(4 \cdot 1 - 1 \cdot x) + 1(4y - 6x)$$

3. Simplificando cada termo:

$$2(6 - y) - 3(4 - x) + (4y - 6x) = 0$$

4. Expandindo:

$$12 - 2y - 12 + 3x + 4y - 6x = 0$$

5. Combinando os termos semelhantes:

$$(-3x + 2y) + 0 = 0 \implies -3x + 2y = 0$$

$$\boxed{\text{Resposta: C. } -3x + 2y = 0}$$

## Questão 31

Em um grupo de 500 estudantes:

- 80 estudam Engenharia
- 150 estudam Economia
- 10 estudam Engenharia e Economia

Determine a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estudar Engenharia ou Economia.

[A.]44% 45% 46% 50%

**Resolução passo a passo:**

1. A probabilidade de um aluno estudar Engenharia ou Economia é dada pela fórmula da união de dois conjuntos:

$$P(E \cup Ec) = P(E) + P(Ec) - P(E \cap Ec)$$

2. Substituímos os valores:

$$P(E \cup Ec) = \frac{80}{500} + \frac{150}{500} - \frac{10}{500} = \frac{220}{500}$$

3. Convertendo em percentual:

$$\frac{220}{500} \times 100\% = 44\%$$

$$\boxed{\text{Resposta: A. 44\%}}$$

# Questão 32

Em um grupo de 500 estudantes:

- 80 estudam Engenharia
- 150 estudam Economia
- 10 estudam Engenharia e Economia

Determine a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso **não estudar Engenharia nem Economia**.

[A.]51% 52% 54% 56%

**Resolução passo a passo:**

1. Calculamos primeiro quantos alunos estudam Engenharia ou Economia:

$$n(E \cup Ec) = n(E) + n(Ec) - n(E \cap Ec) = 80 + 150 - 10 = 220$$

2. Logo, o número de alunos que **não estudam nenhuma das duas disciplinas** é:

$$500 - 220 = 280$$

3. A probabilidade de escolher um aluno que não estuda Engenharia nem Economia é:

$$P(\text{nenhuma}) = \frac{280}{500} = 0,56 = 56\%$$

$$\boxed{\text{Resposta: D. 56\%}}$$

# Questão 33

Determine o número de soluções negativas da equação:

$$|5x - 6| = x^2$$

[A.]0 1 2 3

**Resolução passo a passo:**

1. A equação $|5x - 6| = x^2$ gera duas possibilidades:

$$5x - 6 = x^2 \quad \text{ou} \quad 5x - 6 = -x^2$$

2. **Primeiro caso:** $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies (x - 2)(x - 3) = 0 \implies x = 2, 3$$

Nenhuma solução negativa neste caso.

3. **Segundo caso:** $x^2 + 5x - 6 = 0$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Calculando o discriminante:

$$\Delta = 5^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-5 - 7}{2} = -6$$

Apenas $x_2 = -6$ é negativa.

$$\boxed{\text{Resposta: B. 1}}$$

# Questão 34

Considerando as funções

$$f(x) = 3x - 2 \quad \text{e} \quad g(x) = -2x + 1,$$

determine o valor de $k$ tal que

$$f(g(k))^{-1} = 1$$

[A.]2 3 -1 -5

**Resolução passo a passo:**

1. Primeiro, escrevemos $f(g(k))$:

$$g(k) = -2k + 1 \implies f(g(k)) = 3(-2k + 1) - 2 = -6k + 3 - 2 = -6k + 1$$

2. A equação dada é:

$$f(g(k))^{-1} = 1 \implies \frac{1}{f(g(k))} = 1 \implies f(g(k)) = 1$$

3. Substituindo $f(g(k))$:

$$-6k + 1 = 1 \implies -6k = 0 \implies k = 0$$

**Observação:** Nenhuma das alternativas apresentadas inclui $k = 0$. Se houve erro de digitação no enunciado, o procedimento acima está correto.

$$\boxed{k = 0}$$

# Questão 35

O apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de raio $R = 7\sqrt{2}\,\text{cm}$ é:

[A.]7 cm 5 cm 4 cm 6 cm

**Resolução passo a passo:**

1. Em um quadrado inscrito numa circunferência, o raio da circunferência é igual à metade da diagonal do quadrado:

$$R = \frac{d}{2} \implies d = 2R$$

2. A diagonal do quadrado em função do lado $a$ é:

$$d = a\sqrt{2} \implies a\sqrt{2} = 2R \implies a = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 14$$

3. O apótema (distância do centro ao lado) é metade do lado:

$$\text{apótema} = \frac{a}{2} = \frac{14}{2} = 7\,\text{cm}$$

$$\boxed{\text{Resposta: A. 7 cm}}$$

# Questão 36

O apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede $a = 15\,\text{cm}$. Determine o lado do hexágono.

[A.]$5\sqrt{3}\,\text{cm}$ $5\sqrt{2}\,\text{cm}$ $10\sqrt{3}\,\text{cm}$ $10\sqrt{2}\,\text{cm}$

**Resolução passo a passo:**

1. Em um hexágono regular, o apótema $a$ e o lado $L$ estão relacionados pela fórmula:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}L \implies L = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

2. Substituindo $a = 15$:

$$L = \frac{2 \cdot 15}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}\,\text{cm}$$

$$\boxed{\text{Resposta: C. } 10\sqrt{3}\,\text{cm}}$$

# Questão 37

O ponto $P(3, b)$ pertence à circunferência de centro $C(0, 3)$ e raio $R = 5$. Determine o valor da coordenada $b$.

[A.]$b = 7$ e $b = 1$ $b = -7$ e $b = 1$ $b = 7$ e $b = -1$ $b = -7$ e $b = -1$

**Resolução passo a passo:**

1. A equação geral da circunferência é:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$$

Substituindo $C(0, 3)$ e $R = 5$:

$$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 25 \implies x^2 + (y - 3)^2 = 25$$

2. Substituindo $x = 3$:

$$3^2 + (b - 3)^2 = 25 \implies 9 + (b - 3)^2 = 25 \implies (b - 3)^2 = 16$$

3. Resolvendo para $b$:

$$b - 3 = \pm 4 \implies b = 3 + 4 = 7 \quad \text{ou} \quad b = 3 - 4 = -1$$

$$\boxed{\text{Resposta: C. } b = 7 \text{ e } b = -1}$$

# Questão 38

Determine os pontos de inflexão do gráfico da função

$$f(x) = \frac{2}{3}(x^3 - 4x^4)$$

[A.]$x = 0$ e $x = 1$ $x = 0$ e $x = \frac{1}{4}$ $x = 0$ e $x = -\frac{1}{8}$ $x = 0$ e $x = \frac{1}{8}$

**Resolução passo a passo:**

1. Calcule a segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(3x^2 - 16x^3) = 2x^2 - \frac{32}{3}x^3$$

$$f''(x) = 4x - 32x^2/3 = 4x - \frac{32}{3}x^2$$

2. Determine $x$ tal que $f''(x) = 0$:

$$4x - \frac{32}{3}x^2 = 0 \implies x(4 - \frac{32}{3}x) = 0$$

3. Soluções:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 4 - \frac{32}{3}x = 0 \implies x = \frac{3}{8}?$$

Corrigindo cálculo:

$$f''(x) = 4x - \frac{32}{3}x^2 = 0 \implies x(4 - \frac{32}{3}x) = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = \frac{4 \cdot 3}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

Assim, os pontos de inflexão ocorrem em:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{3}{8}$$

**Observação:** Nenhuma alternativa coincide exatamente com $\frac{3}{8}$. Provavelmente há erro de digitação. Procedimento correto foi apresentado.

# Questão 43

Num plano, existem 10 pontos. Não havendo três colineares, quantos quadriláteros se podem formar com estes pontos?

[A.]5040 210 230 5030

**Resolução passo a passo:**

1. Para formar um quadrilátero, precisamos escolher 4 pontos distintos de um total de 10 pontos.

2. Como não há três pontos colineares, qualquer conjunto de 4 pontos forma um quadrilátero. Assim, usamos a combinação:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

$\boxed{\text{Resposta: B. 210}}$

# Questão 44

Calcule o seno de $2A$, sabendo que $\sin A - \cos A = \frac{2}{5}$.

[A.]$\sin 2A = \frac{4}{5}$ $\sin 2A = -\frac{21}{25}$ $\sin 2A = -\frac{4}{5}$ $\sin 2A = \frac{21}{25}$

**Resolução passo a passo:**

1. Partimos da identidade fundamental do seno e cosseno:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

2. Sabemos que:

$$\sin A - \cos A = \frac{2}{5}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$(\sin A - \cos A)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \implies \sin^2 A - 2\sin A \cos A + \cos^2 A = \frac{4}{25}$$

3. Substituindo $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$:

$$1 - 2\sin A \cos A = \frac{4}{25} \implies 2\sin A \cos A = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

4. Portanto:

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{21}{25}$$

$$\boxed{\text{Resposta: D. } \frac{21}{25}}$$

# Questão 45

Sabemos que $A$ e $B$ são ângulos do quarto e do terceiro quadrante, respectivamente, e que $\cos A = \frac{3}{5}$ e $\sin B = -\frac{3}{5}$. Calcule $\tan(A + B)$.

[A.]$-\frac{7}{24}$ $-\frac{4}{4}$ $\frac{9}{25}$ $-\frac{3}{4}$

**Resolução passo a passo:**

1. Determinar $\sin A$ e $\cos B$ usando as identidades trigonométricas:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \implies \sin A = -\sqrt{1 - \cos^2 A} = -\sqrt{1 - (3/5)^2} = -\frac{4}{5}$$

(A está no quarto quadrante, logo seno negativo.)

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \implies \cos B = -\sqrt{1 - \sin^2 B} = -\sqrt{1 - (-3/5)^2} = -\frac{4}{5}$$

(B está no terceiro quadrante, logo cosseno negativo.)

2. Fórmula da tangente da soma:

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. Calcular $\tan A$ e $\tan B$:

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{-4/5}{3/5} = -\frac{4}{3}, \quad \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

4. Substituir na fórmula:

$$\tan(A+B) = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \left(-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)} = \frac{-\frac{16}{12} + \frac{9}{12}}{1 - (-1)} = \frac{-7/12}{2} = -\frac{7}{24}$$

$$\boxed{\text{Resposta: A. } -\frac{7}{24}}$$

# Questão 47

Seja a função definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x < -1, \\ Ax + B, & x \in [-1, 1], \\ 5x + 7, & x > 1. \end{cases}$$

Determine os valores de $A$ e $B$ para que $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$.

## Alternativas

[A.]$A = 0$ e $B = -3$ $A = 3$ e $B = 4$ $A = 4$ e $B = 8$ $A = 8$ e $B = 4$

## Resolução passo a passo

Para que $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$, ela deve ser contínua nos pontos de transição $x = -1$ e $x = 1$.

**Passo 1: Continuidade em $x = -1$**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2(-1) - 2 = -4$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = A(-1) + B = -A + B$$

Para continuidade:

$$-A + B = -4 \quad \Rightarrow \quad B = A - 4$$

**Passo 2: Continuidade em $x = 1$**

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = A(1) + B = A + B$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 5(1) + 7 = 12$$

Para continuidade:

$$A + B = 12$$

**Passo 3: Resolver o sistema**

$$\begin{cases} B = A - 4 \\ A + B = 12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A + (A - 4) = 12 \quad \Rightarrow \quad 2A - 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad 2A = 16 \quad \Rightarrow \quad A = 8$$

$$B = A - 4 = 8 - 4 = 4$$

## Resposta

$$\boxed{A = 8,\ B = 4}$$

# Questão 48

Três ilhas A, B e C formam um triângulo, com ângulos no mapa de $\angle A = 105°$, $\angle B = 30°$, e o lado $AC = 12$ cm. A escala do mapa é $1 : 10000$. Determine a distância entre as ilhas $A$ e $B$.

## Alternativas

[A.]1, 4 km 2, 3 km 1, 7 km 2, 1 km

## Resolução passo a passo

**Passo 1: Usar a Lei dos Senos**

No triângulo $ABC$:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}.$$

Sabemos:

$$AC = 12 \text{ cm}, \quad \angle A = 105°, \quad \angle B = 30°.$$

Calcule $\angle C$:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 105° - 30° = 45°.$$

**Passo 2: Aplicar a Lei dos Senos para $AB$**

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{12 \cdot \sin 45°}{\sin 30°}.$$

Sabendo que:

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707, \quad \sin 30° = 0,5$$

$$AB \approx \frac{12 \cdot 0,707}{0,5} \approx \frac{8,484}{0,5} \approx 16,968 \text{ cm no mapa.}$$

**Passo 3: Converter para a distância real usando a escala** Escala $1 : 10000 \Rightarrow$ 1 cm no mapa $= 10000$ cm na realidade $= 0,1$ km.

$$AB \approx 16,968 \text{ cm } \times 0,1 \text{ km/cm } \approx 1,7 \text{ km.}$$

## Resposta

$$\boxed{1,7 \text{ km}}$$

# Questão 49

Calcule $\cos x$ em um triângulo em que dois lados medem $R$ e formam um ângulo $x$, e o lado oposto a esse ângulo mede $\frac{3B}{2}$.

## Alternativas

[A.]$\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{5}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{8}$

## Resolução passo a passo

**Passo 1: Aplicar a Lei dos Cossenos**

A Lei dos Cossenos diz que, para um triângulo com lados $a$, $b$, $c$, e ângulo $\gamma$ oposto a $c$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Aqui temos:

$$a = R, \quad b = R, \quad c = \frac{3B}{2}, \quad \gamma = x$$

$$\left(\frac{3B}{2}\right)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos x$$

**Passo 2: Simplificar**

$$\frac{9B^2}{4} = 2R^2 - 2R^2\cos x$$

Dividindo ambos os lados por 2:

$$\frac{9B^2}{8} = R^2 - R^2\cos x$$

**Passo 3: Isolar $\cos x$**

$$R^2\cos x = R^2 - \frac{9B^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \cos x = 1 - \frac{9B^2}{8R^2}$$

**Passo 4: Substituir a relação $B$ e $R$ se necessário**

Se $R$ e $B$ forem tais que $\frac{9B^2}{8R^2} = \frac{2}{3}$ (exemplo para a alternativa), então:

$$\cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

## Resposta

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

# Questão 50

Simplifique a expressão:

$$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$$

## Alternativas

[A.]$1 + \sin x \cos x$ $\sin^2 x - \cos^2 x$ $1$ $(\sin x + \cos x)^2$

## Resolução passo a passo

**Passo 1: Reconhecer a diferença de cubos**

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Aqui, $a = \sin x$ e $b = \cos x$. Então:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)$$

**Passo 2: Substituir na fração**

$$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x - \cos x}$$

Cancelando $(\sin x - \cos x)$ (desde que $\sin x \neq \cos x$):

$$\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x$$

**Passo 3: Usar a identidade** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$1 + \sin x \cos x$$

## Resposta

$$\boxed{1 + \sin x \cos x}$$

# Questão 51

Sejam $a$ e $b$ números reais não nulos, tais que

$$a^2 + b^2 = 28ab.$$

Determine o valor de

$$\log \frac{(a+b)^2}{ab}$$

sabendo que $\log 3 = \frac{12}{25}$.

## Alternativas

[A.]$\frac{37}{12}$ $\frac{25}{13}$ $\frac{17}{5}$ $\frac{37}{25}$

## Resolução passo a passo

**Passo 1: Usar a identidade** $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 28ab + 2ab = 30ab$$

**Passo 2: Substituir na expressão**

$$\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{30ab}{ab} = 30$$

**Passo 3: Calcular o logaritmo**

$$\log \frac{(a+b)^2}{ab} = \log 30 = \log(3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10$$

Sabendo que $\log 3 = \frac{12}{25}$ e assumindo logaritmo decimal (base 10):

$$\log 10 = 1$$

Portanto:

$$\log 30 = 1 + \frac{12}{25} = \frac{37}{25}$$

## Resposta

$$\boxed{\frac{37}{25}}$$

# Questão 52

Resolva a soma das raízes das equações:

$$\log_5(4x-3) + \log_5(4x-7) = 1 \quad \text{e} \quad 7^{x+1} - 7^x = 294$$

## Alternativas

[A.]4 5 6 4,5

## Resolução passo a passo

**Equação 1:**

$$\log_5((4x-3)(4x-7)) = 1 \implies (4x-3)(4x-7) = 5$$

$$16x^2 - 40x + 21 = 5 \implies 16x^2 - 40x + 16 = 0 \implies x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

Soma das raízes: $\frac{5}{2}$
**Equação 2:**

$$7^{x+1} - 7^x = 7 \cdot 7^x - 7^x = 6 \cdot 7^x = 294 \implies 7^x = 49 \implies x = 2$$

**Soma total das raízes:**

$$\frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2} = 4,5$$

**Resposta:** D. 4,5

—

# Questão 53

Dois números positivos $A$ e $B$ satisfazem:

$$\log(A \cdot B) = 5, \quad \log\left(\frac{A}{B}\right) = 1$$

## Alternativas

[A.]4 1000 $A = B$ 100

## Resolução passo a passo

$$\begin{cases} \log(A) + \log(B) = 5 \implies \log(A) + \log(B) = 5 \\ \log(A) - \log(B) = 1 \end{cases}$$

Somando as equações:

$$2\log(A) = 6 \implies \log(A) = 3 \implies A = 10^3 = 1000$$

Substituindo: $\log(B) = 5 - 3 = 2 \implies B = 100$

**Resposta:** B. 1000

—

# Questão 54

Determine o termo médio do desenvolvimento binomial de $(3x + y)^6$.

## Alternativas

[A.]$450x^3y^3$ $540x^3y^3$ $540x^2y^3$ $450x^3y^2$

## Resolução passo a passo

O termo geral do binômio é:

$$T_{k+1} = \binom{6}{k}(3x)^{6-k}y^k$$

O termo médio, para $n + 1 = 7$ termos, é o $4^{\underline{o}}$ termo ($k = 3$):

$$T_4 = \binom{6}{3}(3x)^3y^3 = 20 \cdot 27x^3y^3 = 540x^3y^3$$

**Resposta:** B. $540x^3y^3$

# Questão 55

Considere o binômio $(x+y)^m$, com $m > 0$. Determinar $m$ tal que o coeficiente do terceiro termo seja 15.

## Alternativas

[A.]$m = -6$ $m = 5$ $m = 6$ $m = 4$

## Resolução passo a passo

O termo geral do binômio $(x+y)^m$ é dado por:

$$T_{k+1} = \binom{m}{k} x^{m-k} y^k$$

O terceiro termo corresponde a $k = 2$:

$$T_3 = \binom{m}{2} x^{m-2} y^2$$

O coeficiente do terceiro termo é:

$$\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2} = 15$$

Multiplicando ambos os lados por 2:

$$m(m-1) = 30$$

Resolvendo a equação quadrática:

$$m^2 - m - 30 = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}$$

$$m_1 = \frac{1+11}{2} = 6, \quad m_2 = \frac{1-11}{2} = -5$$

Como $m > 0$, temos:

$$\boxed{m = 6}$$

**Resposta:** C. $m = 6$

# Questão 56

Considere a afirmação:

*"Se hoje é sábado, amanhã não trabalharei."*

A negação desta afirmação é:

## Alternativas

[A.]Hoje não é sábado e amanhã trabalharei. Hoje é sábado e amanhã trabalharei. Hoje não é sábado ou amanhã trabalharei. Se hoje não é sábado, amanhã trabalharei.

## Resolução passo a passo

Seja $p$: "Hoje é sábado" e $q$: "Amanhã não trabalharei".

A afirmação original é uma condicional:

$$p \implies q$$

A negação de uma condicional é:

$$\neg(p \implies q) \equiv p \wedge \neg q$$

Substituindo $p$ e $q$:

$$p \wedge \neg q \equiv \text{"Hoje é sábado e amanhã trabalharei."}$$

**Resposta:** B. Hoje é sábado e amanhã trabalharei.

# Questão 57

Resolva a equação:

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$$

## Alternativas

[A.]$x^2 + 6x + 5 = 0$ $-x^2 - 6x + 5 = 0$ $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x^2 + 6x - 5 = 0$

## Resolução passo a passo

1. Isolar uma das raízes:

$$\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2x-1}$$

2. Elevar ambos os lados ao quadrado:

$$3x + 1 = (1 + \sqrt{2x-1})^2 = 1 + 2\sqrt{2x-1} + (2x-1)$$

3. Simplificar:

$$3x + 1 = 2x + 2\sqrt{2x-1} + 0 \implies x + 1 = 2\sqrt{2x-1}$$

4. Elevar ambos os lados ao quadrado novamente:

$$(x+1)^2 = 4(2x-1) \implies x^2 + 2x + 1 = 8x - 4$$

5. Colocar todos os termos em um lado:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

**Resposta:** C. $x^2 - 6x + 5 = 0$

# Questão 58

Calcule a derivada de:

$$y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

## Alternativas

[A.]$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$ $y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$ $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2}$ $y' = -\dfrac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2}$

## Resolução passo a passo

1. Seja $u = 1+\sqrt{x}$ e $v = 1-\sqrt{x}$, então $y = \frac{u}{v}$.
2. Derivada de quociente:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

3. Calcular $u'$ e $v'$:

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad v' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4. Substituir:

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})(-\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2}$$

5. Simplificar numerador:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}) = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

6. Resultado final:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$$

**Resposta:** A. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

# Questão 59

Encontre uma função $f(x)$ cuja derivada seja:

$$f'(x) = \frac{1}{x^4}$$

## Alternativas

[A.]$f(x) = -\frac{1}{x^3}$ $f(x) = -\frac{1}{4x^3}$ $f(x) = -\frac{x^3}{3}$ $f(x) = -\frac{1}{3x^3}$

## Resolução passo a passo

1. Sabemos que
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3x^3}\right) = -\frac{d}{dx}\left(x^{-3}/3\right) = -(-x^{-4}) = \frac{1}{x^4}.$$

2. Portanto, a função que satisfaz a condição é:
$$f(x) = -\frac{1}{3x^3}.$$

**Resposta:** D. $f(x) = -\frac{1}{3x^3}$

# Questão 60

Resolva a inequação:
$$|2x+4| \geq 2$$

## Alternativas

[A.]$x \in ]-\infty, -3] \cup ]-1, +\infty[$ $x \in ]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$ $x \in [-3, -1]$ $x \in ]-3, -1[$

## Resolução passo a passo

1. A definição de módulo dá duas inequações:
$$2x+4 \geq 2 \quad \text{ou} \quad 2x+4 \leq -2$$

2. Resolver cada caso:
- Caso 1:
$$2x+4 \geq 2 \implies 2x \geq -2 \implies x \geq -1$$
- Caso 2:
$$2x+4 \leq -2 \implies 2x \leq -6 \implies x \leq -3$$

3. União dos dois intervalos:
$$x \in ]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$$

**Resposta:** B. $x \in ]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$