Resumo: Vectores, Rectas e Circunferência

Resoluções de Matemática

August 27, 2025

Bem-vindo(a) à nossa aplicação de preparação para exames! Chegou a hora de se destacar nos seus testes e conquistar o sucesso acadêmico que você merece. Apresentamos o "Guião de Exames Resolvidos": a sua ferramenta definitiva para uma preparação eficaz e resultados brilhantes!

1 Vectores

1.1 Conceitos básicos

Um vector no plano $\mathbb{R}^2$ é definido por módulo, direção e sentido. Representa-se por $\vec{v} = (v_x, v_y)$. O módulo é:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

A direção é o ângulo θ com o eixo x:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

1.2 Vector unitário

Um vector unitário possui módulo igual a 1:

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

1.3 Vectores no plano cartesiano

Para dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1)$$

1.4 Operações com vectores

[left=1cm]Adição: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$ Subtração: $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$ Multiplicação por escalar: $\lambda\vec{v} = (\lambda v_x, \lambda v_y)$ Produto escalar: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos\theta$

1.5 Adição geométrica

Método do triângulo: posiciona-se a cauda de $\vec{b}$ na cabeça de $\vec{a}$. O resultante $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ vai da cauda de $\vec{a}$ até à cabeça de $\vec{b}$.

Método do paralelogramo: parte-se da mesma origem para $\vec{a}$ e $\vec{b}$; a diagonal define $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$.

2 Rectas

2.1 Equação geral

A equação geral da recta é:

$$Ax + By + C = 0$$

O declive é:

$$m = -\frac{A}{B}$$

2.2 Equação reduzida

Forma explícita:

$$y = mx + b$$

2.3 Equação ponto-declive

Para um ponto (x_0, y_0) com declive m:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

2.4 Rectas paralelas e perpendiculares

[left=1cm]Paralelas: $m_1 = m_2$ Perpendiculares: $m_1 m_2 = -1$

2.5 Equação da recta por dois pontos

Para $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

2.6 Distância de um ponto a uma recta

Para $Ax + By + C = 0$ e ponto $P(x_0, y_0)$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3 Circunferência

3.1 Equações

Forma canónica:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Forma geral:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

O centro e raio são:

$$a = -\tfrac{D}{2}, \quad b = -\tfrac{E}{2}, \quad r = \sqrt{\left(\tfrac{D}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{E}{2}\right)^2 - F}$$

3.2 Posição relativa recta-circunferência

Substituindo $y = mx + b$ na equação, analisamos o discriminante Δ:

[left=1cm]$\Delta > 0$: secante (2 pontos) $\Delta = 0$: tangente (1 ponto) $\Delta < 0$: exterior (nenhuma interseção)

3.3 Tangente

A tangente no ponto (x_1, y_1) é perpendicular ao raio $\overrightarrow{CP}$.

3.4 Medidas geométricas

[left=1cm]Comprimento: $L = 2\pi r$ Área: $A = \pi r^2$

Exemplos rápidos

1. Unitário de $\vec{v} = (3, 4)$: $\|\vec{v}\| = 5 \Rightarrow \hat{u} = (3/5, 4/5)$.
2. Recta por $(1, 2)$ e $(4, 8)$: $m = \frac{8-2}{4-1} = 2$, logo $y - 2 = 2(x - 1)$.
3. Circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$: $C(3, -2)$ e $r = 5$.