Bem-vindo(a) à nossa aplicação de preparação para exames! Chegou a hora de se destacar nos seus testes e conquistar o sucesso acadêmico que você merece. Apresentamos o "Guião de Exames Resolvidos": a sua ferramenta definitiva para uma preparação eficaz e resultados brilhantes!

Aqui, encontrará uma vasta coleção de exames anteriores cuidadosamente selecionados e resolvidos por especialistas em cada área. Nossa aplicação é perfeita para estudantes de todos os níveis acadêmicos, desde o ensino médio até a graduação universitária.

\ República de Moçambique
Matemática Ministério da Educação 1ª Época
12ª Classe/2011 Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências

1. Considere as proposições:

p: Samora Machel foi 1º presidente de Moçambique independente.

q: Moçambique é um país africano.

Qual é a escrita simbólica de:

Samora Machel foi o 1º presidente de Moçambique independente e Moçambique não é um país africano?

A p^p B ~p^p C p^~p D ~(p^p)

Resolução:
p: Samora Machel foi 1º presidente de Moçambique independente.

q: Moçambique é um país africano: Lembre-se ^ é conjunção

Negação :~(q: $Moçambique$ é $um\ país\ africano$:) = Moçambique não é um país

2. Qual das proposições é equivalente a $p \wedge (p \wedge \sim q)$?

A $p \wedge \sim q$ B $\sim p \wedge q$ C $p \wedge q$ D $p \vee \sim q$

Resolução:

$p \wedge (p \;\wedge \sim q) \leftrightarrow (p \wedge p) \wedge \sim q \leftrightarrow p \wedge \sim q$ uma vez so temos ^ conjunção podemos aplicar P. Associativa

3. Qual é o domínio de existência da expressão $\frac{2+X}{X^2+3}$

A $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

B $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

C $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$

D $\mathbb{R}$

Explicação: Para o dominio do tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$ é necessario que $q(x) \neq 0$

$X^2 + 3 \neq 0$ **esta em R nunca se anula**

4.Qual é o valor de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - (0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0)$

$= 1 + 0 + 1 - (0 + 1 + 0) = 1$

Opção: C

5. Qual é o intervalo que corresponde a solução de $\frac{x-3}{x+5} \geq 2$

A $]-\infty; -13]$ B $[-13; -5[$ C$]-13; +\infty]$ D$[-13; -5]$

Resolução:

$$\frac{x-3}{x+5} \geq 2 \leftrightarrow \frac{x-3}{x+5} - 2 \geq 0 \leftrightarrow \frac{x-3}{x+5} - \frac{2}{1} \geq 0 \leftrightarrow \frac{1(x-3) - 2(x+5)}{x+5} \geq 0$$

$$\leftrightarrow \frac{x - 3 - 2x - 10}{x+5} \geq 0 \leftrightarrow \frac{-x-13}{x+5} \geq 0$$

Explicação: $\frac{-x-13}{x+5} \geq 0$
queremos
parte positiva

$-x - 13 = 0 \leftrightarrow x = -13$

$x + 5 = 0 \leftrightarrow x = -5$

domínio
$x + 5 \neq 0 \leftrightarrow x \neq -5$

x	$[-\infty - 13]$	-13	$[-13; -5[$	-5	$]-5; +\infty[$
$x + 5$	-	-	-	0	+
$-x - 13$	+	0	-	-	-

$\frac{-x-13}{x+5}$	-	ND	+	0	+

6.Qual é a soma das raízes da equação $\boldsymbol{x^3 - x^2 - 6x = 0}$

A -2 B 0 C 1 D 3

Resolução:

$x^3 - x^2 - 6x = 0 \quad x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0 \ ou \ (x^2 - x - 6) = 0 \quad \leftrightarrow x_1 = 0 \ ou \ (x^2 - x - 6) = 0$

$x^2 - x - 6 \ usando \ Soma \ e \ Produto \ teremos \ S = \frac{-b}{a} \quad e \ P = \frac{c}{a}$

$S = \frac{-(-1)}{1} \quad e \ P = \frac{-6}{1} \leftrightarrow 3 - 2 = 1 \ e \ 3 \times (-2) = -6$

$x_2 = 3 \ v \ x_3 = -2$

Soma das raízes: $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 3 + (-2) = 1$

Explicação: Lembre-se

Pela definição $\boldsymbol{\sqrt{x^2} = |x|}$

$\boldsymbol{\sqrt{x^2(x-1)^2} = \sqrt{(x(x-1))^2} = |x(x-1)|}$

7. Qual das equações é equivalente a $\boldsymbol{\sqrt{x^2(x-1)^2}}$

A $\boldsymbol{x(x-1)}$ **B** $\boldsymbol{x(x-1)^2}$ **C** $\boldsymbol{x^2|(x-1)^2|}$ **D** $\boldsymbol{|x(x-1)|}$

8.Qual é a condição para que $\boldsymbol{|-x+1| = -x+1}$

A $x < -1$ B $x \geq -1$ C $x < 1$ D $x \leq -1$

Explicação: Lembre-se

Pela definição

$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} -\boldsymbol{x}, & x < 0 \\ \boldsymbol{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Resolução:

$|\boldsymbol{-x+1}| = \begin{cases} -(\boldsymbol{-x+1}) \ , & \boldsymbol{-x+1} < 0 \\ \boldsymbol{-x+1} \ , & \boldsymbol{-x+1} \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$

$|\boldsymbol{-x+1}| = \begin{cases} -(\boldsymbol{-x+1}) \ , & \boldsymbol{-x < 1} \\ \boldsymbol{-x+1} \ , & \boldsymbol{-x \geq 1} \end{cases}$

$|\boldsymbol{-x+1}| = \begin{cases} -(\boldsymbol{-x+1}) \ , & \boldsymbol{x > -1} \\ \boldsymbol{-x+1} \ , & \boldsymbol{x \leq -1} \end{cases}$

9. Qual é o valor de *n* na equação $\boldsymbol{\frac{(n+1)!}{n!} = 68}$

Explicação N.9: Procuremos simplificar expressão maior isto é:

Se n for		1	2	3
Expressões	n+1	2	3	4
	n	1	2	3

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)(n+1-1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!}$$

A $-\frac{1}{67}$ B $\frac{1}{67}$ C 67 D 69

Resolução:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = 68 \ \ vamos\ simplificar\ \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)(n+1-1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!}$$

$$n+1 = 68 \leftrightarrow n = 68-1 \leftrightarrow n = 67$$

10.Numa festa há cinco tipos de doces e três de salgados. Se cada pessoa receber apenas três tipos de doces e dois de salgados, de quantas maneiras diferentes poder-se-á, fazer esta distribuição?

A 120 **B 30** **C** 26 **D** 13

Para cinco tipos de doces e três de salgados: C_3^5

Para, Se cada pessoa receber apenas três tipos de doces e dois de salgados: C_2^3

Pelo conectivos 'i' e = ^ será multiplicação

$$C_3^5 \times C_2^3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} \times \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{5!}{2!\,3!} \times \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{5.4.3!}{2!\,3!} \times \frac{3.2!}{1!\,2!}$$

$$= \frac{5.4}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{20}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{60}{2} = 30$$

Explicação: Lembre-se que a ordem nesse caso não importa, logo usaremos Combinação

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

11. Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 amarelas (idênticas).
Qual é a probabilidade desta bola ser verde?

A $\frac{1}{5}$ B $\frac{5}{12}$ C $\frac{7}{12}$ D $\frac{5}{7}$

Resolução:

$$P(A) = \frac{C.F}{C.P} = \frac{5}{12}$$

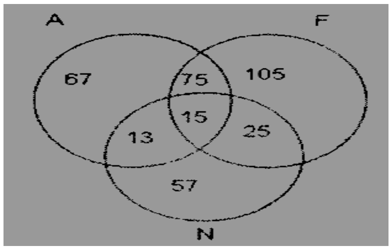
Explicação:

C.F: pretende se ter bola verdeque são apenas 5

C.P: é todo nosso universo que $são\ 7 + 5 = 12$

12.A figura representa atletas de uma associação recreativa, praticantes de atletismo (A), futebol (F)
e natação (N).

Qual é a probabilidade de, escolhido ao acaso um atleta, ser praticante das três modalidades?



A $\frac{103}{357}$ B $\frac{30}{119}$ C $\frac{28}{357}$ D $\frac{3}{119}$

Olá! Estou aqui para ajudar com qualquer dúvida ou informação de que você precise. Se você tiver alguma pergunta ou precisar de assistência, sinta-se à vontade para entrar em contato comigo no WhatsApp. Estou disponível para conversar e ajudar no que for necessário. Aguardo o seu contato! 879369395

Resolução:
Praticante das três modalidades: $C.F: A \cap F \cap N = 15$
Numero de casos possíveis : somar todos valores existente $C.P: 76 + 75 + 14 + 13 + 57 + 25 + 105 = 357$

$$P(A) = \frac{C.F}{C.P} = \frac{15}{357} = \frac{15:3}{357:3} = \frac{5}{119}$$

13. **Qual é a expressão analítica da função cujo gráfico está representado na figura?**

A $-x^2 + 2x - 1$ C $-x^2 + 2x + 1$
B $-x^2 - 2x - 1$ D $-x^2 - 2x + 1$

Resolução:
$y = ax^2bx + c$
$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ $nao\ existindo\ raiz\ \ podemos\ usar\ a\ formula$
$$a = \frac{c}{x_1 \times x_2} = \frac{y}{x_1 \times x_2} = \frac{-1}{1 \times 1} = \frac{-1}{1} = -1$$
$x_2 = x_1 = 1$
$y = -1(x - 1)(x - 1) = -1(x^2 - x - x + 1) = -x^2 + 2x - 1$

14. **Qual é o contradomínio da função $f\left(x\right) = 2 + cosx$?**
A. $[-3; -1]$ B. $[-2; 2]$ C. $[-1; 1]$ D. $[1; 3]$

Resolução:
Sabe-se que $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Adicionando 2 a todos os membros da inequação, tem-se:

$-1 + 2 \leq cos\,x + 2 \leq 1 + 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + cos\,x \leq 3$

$\Leftrightarrow 1 \leq f\ (x) \leq 3$

Portanto, o contradomínio da função $f(x)$ é $[1; 3]$.

Explicação: Contradomínio das funções trigonométricas

- $-1 \leq sen\ f\ (x) \leq 1$
- $-1 \leq cos\ f\ (x) \leq 1$
- $-\infty < tg\ f\ (x) < +\infty$

15. Considere a função $f\left(x\right) = senx\ com\ x\epsilon\left[-\pi; \pi\right]$.

Qual é o domínio da função $h(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

A $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ B $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ C $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ D $[-\pi; \pi]$

Lembre-se da tabela anterior

O gráfico da função $h(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ obtém-se a partir do Gráfico da função $f(x) = senx$ através da translação de $\frac{\pi}{2}$ Unidades para direita.

Transladando $\frac{\pi}{2}$ Unidades para direita o gráfico de $f(x)$ cujo domínio é $[-\pi; \pi]$, obtém-se o gráfico de $h(x)$ cujo domínio é: $\left[-\pi + \frac{\pi}{2}; \pi + \frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

16. **Qual é a classificação da função $f(x) = x^3 - x + 2$ quanto à paridade?**

A Par **B** ímpar **C** Não par nem ímpar **D** Par e ímpar

Calcula-se $f(-x)$ e $-f(x)$:

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) + 2 = -x^3 + x + 2$

$-f(x) = -(x3 - x + 2) = -x^3 + x - 2$

$Como\ f(-x) \neq f(x)\ e\ também\ f(-x) \neq -f(x)$

$\boldsymbol{f(x) = x^3 - x + 2},\quad então\ \ nao\ é\ par\ nem\ ímpar.$

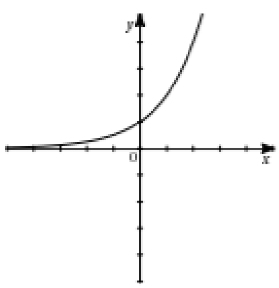
Explicação: Lembre-se

$Se\ f(-x) = f(x), então\ f(x)\ é\ par.$

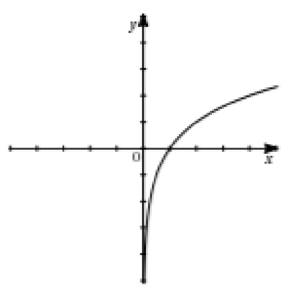
$Se\ f(-x) = -f(x), então\ f(x)\ é\ ímpar$

17. Observe as figuras.
Qual é o gráfico da inversa da função $\log_2 x$?

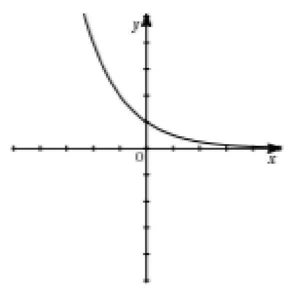
A.



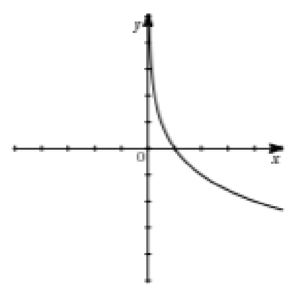
B.



C.

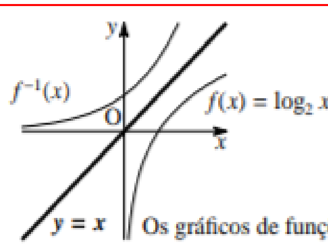


D.



Por isso, a opção A representa o gráfico da inversa da função $f(x) = \log_2 x$.

Opção: A



Os gráficos de funções inversas uma da outra são simétricos em relação à recta $y = x$.

Olá! Estou aqui para ajudar com qualquer dúvida ou informação de que você precise. Se você tiver alguma pergunta ou precisar de assistência, sinta-se à vontade para entrar em contato comigo no WhatsApp. Estou disponível para conversar e ajudar no que for necessário. Aguardo o seu contato! 879369395

Numa sucessão de termo geral $a_n = a_{n-1} + 5$ com $n \in \mathbb{N}$, o termo de ordem três é igual a 17. Qual é o termo de ordem 2?

A. 5 B. 10 C. 12 D. 22

[Resolução]

Substituindo $n = 3$ em $a_n = a_{n-1} + 5$, tem-se: $a_3 = a_2 + 5$

Como $a_3 = 17$, então tem-se: $a_2 + 5 = 17 \Leftrightarrow a_2 = 12$

Opção: C

$\longleftarrow a_3 = a_{3-1} + 5$

19.

Qual é a ordem do termo 3 na sucessão dada por $a_n = 2n - 5$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2011.1ªÉpoca

[Resolução]

Para se obter a ordem do termo 3, resolve-se a equação $a_n = 3$:

$a_n = 3 \Leftrightarrow 2n - 5 = 3 \Leftrightarrow 2n = 8 \Leftrightarrow n = 4$

Opção: D

⟵ Como a_n representa o termo da ordem n, a solução da equação $a_n = 3$ é a ordem do termo 3.

20.

Qual é o termo geral da sucessão 2; 6; 18; ...?

A. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ B. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ C. $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$ D. $a_n = 3 \cdot 2^{n+1}$

2011.1ªÉpoca

[Resolução]

Como o quociente entre dois termos consecutivos é constante 3, então esta sucessão é uma PG em que $a_1 = 2$ e $q = 3$.

Então, o termo geral é: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Opção: A

$\longleftarrow \underbrace{2, \quad 6,}_{\times 3} \quad \underbrace{\quad 18,}_{\times 3} \quad \underbrace{\quad \ldots}_{\times 3}$

⟵ O termo geral de uma **PG** é dado por $\boldsymbol{a_n = a_1 q^{n-1}}$.

O termo geral de uma **PA** é dado por $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$

21.

Numa progressão aritmética finita, em que a soma dos seus termos é 110, o primeiro e o último termos são respectivamente 2 e 20. Quantos termos tem a sucessão?

A. 21 B. 20 C. 11 D. 10

2011.1ªÉpoca

[Resolução]

Pela condição, tem-se: $S_n = 110$, $a_1 = 2$ e $a_n = 20$

Aplicando a fórmula de soma dos n primeiro termos de uma PA, tem-se: $\dfrac{n(2+20)}{2} = 110 \Leftrightarrow 11n = 110 \Leftrightarrow n = 10$

Opção: D

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

22.
Quais são os três primeiros termos de uma progressão geométrica em que o sétimo termo é 192 e o segundo é 6?

A. 1; 6; 36 B. 3; 6; 9 C. 3; 6; 12 D. 2; 6; 10

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Pela condição tem-se: $a_7 = 192$ e $a_2 = 6$

Como $a_n = a_1 q^{n-1}$, tem-se o seguinte sistema:

← O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 q^{n-1}$

$$\begin{cases} a_1 q^6 = 192 \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1 q} \cdot q^5 = 192 \cdots ① \\ \boldsymbol{a_1 q} = 6 \cdots ② \end{cases}$$

Substituindo ② em ①, tem-se:

$$6q^5 = 192 \Leftrightarrow q^5 = 36 \Leftrightarrow \boldsymbol{q^5 = 2^5 \Leftrightarrow q = 2}$$

← Numa igualdade de duas potências com mesmo expoente ímpar iguala-se as bases, isto é, se m é um número ímpar, então $a^m = b^m \Leftrightarrow a = b$.

Substituindo q por 2 em ①, tem-se: $a_1 \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow a_1 = 3$

Portanto, o termo geral desta PA é: $a_n = a_1 q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Logo, tem-se: $a_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 4 = 12$

← Substitui-se $n = 3$ em $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Portanto, os três primeiros termos são 3; 6; 12.

Opção: C

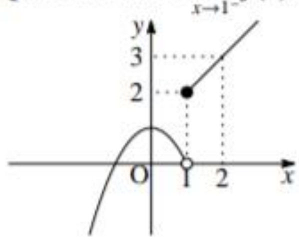
23.
Considere a função f representada na figura. Qual é o valor de $\lim_{x \to 1^-} f(x)$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Não existe.



2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Nota-se que quando x se aproxima de 1 pela esquerda, o gráfico da função f aproxima-se de 0, isto é: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

← Quando x se aproxima de a **pela esquerda**, $f(x)$ aproxima-se de α, simbolicamente, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \alpha$.

Quando x se aproxima de a **pela direita**, $f(x)$ aproxima-se de α, simbolicamente, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha$.

Opção: A

A função $g(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + k & \text{se } x \leq -1 \\ \dfrac{2x+3}{x} & \text{se } x > -1 \end{cases}$ é contínua no ponto de abcissa $x = -1$. Qual é o valor de k?

A. -8 B. -5 C. 5 D. 8

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Para que seja contínua no ponto de $x = -1$, é necessário que:

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^+} g(x) = g(-1)$$

O limite lateral de $g(x)$ à esquerda de $x = -$ é:

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^-} (3x^2 - 4x + k) = 3(-1)^2 - 4(-1) + k = \boldsymbol{k+7}$$

O limite lateral de $g(x9$ à direita de $x = -1$ é:

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2x+3}{x} = \frac{2(-1)+3}{-1} = \mathbf{-1}$$

O valor da função $g(x)$ no potno $x = -1$ é;

$$g(-1) = \frac{2(-1)+3}{-1} = \mathbf{-1}$$

Como estes são iguais, tem-se: $\boldsymbol{k + 7 = -1} \Leftrightarrow k = -8$

Opção: A

◦ **Definição de continuidade de funções**

Uma função $f(x)$ é contínua para $x = a$ se e só se existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. Isto é:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)}$$

⟵ Quando $x \to -1^-$, isto é, $x < -1$, $g(x) = 3x^2 - 4x + k$.

⟵ Quando $x \to -1^+$, isto é, $x > -1$, $g(x) = \dfrac{2x+3}{x}$.

⟵ Quando $x = -1$, $g(x) = 3x^2 - 4x + k$.

25.

Qual é o valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$?

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $-\dfrac{1}{4}$ C. $\dfrac{1}{4}$ D. $\dfrac{1}{2}$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Opção: D

⟵ Multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado $\sqrt{x} + 1$ de $\sqrt{x} - 1$.

⟵ $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = x - 1$

⟵ Substitui-se x por 1.

26.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}$?

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

⟵ **Limite notável**: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

Em geral, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}kx}{kx}=1$.

Opção: A

【Outra resolução】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

⟵ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha x}{\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

27.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^x$?

A. -1 B. e^{-1} C. 1 D. e

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^x=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}-1\right)\cdot x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{x+1}\right)}$$

$$=e^{-\frac{1}{1}}=e^{-1}$$

⟵ Sejam $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ e $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Então tem-se: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

⟵ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{x}{x+1}\right)=-1$ porque como numerador e o denominador têm o mesmo grau, o limite quando $x\to\infty$ é o quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

Opção: B

28.

Considere a função f representada na figura.

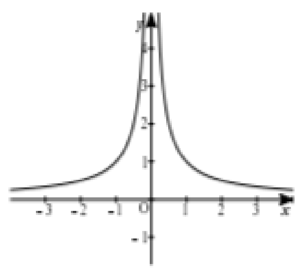
Qual é o valor de $f'(0)$?

A. 0

B. 1

C. ∞

D. Não existe



2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Pela figura, a função não é contínua no ponto de abcissa $x=0$ porque $\nexists f(0)$. Portanto, $f'(0)$ não existe.

⟵ Toda a função que admite derivada finita num dado ponto é contínua nesse ponto.

Opção: D

29.

Qual é a 1ª derivada da função $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$?

A. $\dfrac{2x^2}{\ln x}$ B. $\dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$ C. $\dfrac{2x\ln x - x}{\ln x}$ D. $\dfrac{2x - \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{\ln x}\right]' = \frac{(x^2)'\ln x - x^2(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{2x\ln x - x^2\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$
$$= \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Opção: B

$\longleftarrow \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

★ $(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{R}$ ★ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

30.

Qual é a 1ª derivada da função $f(x) = \sqrt{2x} - 1$?

A. $-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ B. $\dfrac{2}{\sqrt{2x}}$ C. $\dfrac{\sqrt{2x}}{2x}$ D. $\dfrac{\sqrt{2x}}{x}$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$$f'(x) = (\sqrt{2x} - 1)' = (\sqrt{2x})'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot(2x)' = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{2x}}{2x}$$

Opção: C

$\longleftarrow (k)' = 0; \forall \in \mathbb{R}$

$\longleftarrow$ **Derivada de uma função composta**:

$\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$ porque $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

31.

Qual é a 2ª derivada da função $f(x) = \cos x$?

A. $-\operatorname{sen} x$ B. $-\cos x$ C. $\cos x$ D. $\operatorname{sen} x$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

A primeira derivada de $f(x)$ é: $f'(x) = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

Logo, a segunda derivada de $f(x)$ é: $f''(x) = (-\operatorname{sen} x)' = -\cos x$

Opção: B

$\longleftarrow (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

$\longleftarrow (\operatorname{sen} x)' = \cos x$

★A segunda derivada é a derivada da primeira derivada.

32.

O gráfico da função f, definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, tem um extremo máximo. Quais são as coordenadas desse ponto?

A. $\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$ B. $\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$ C. $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ D. $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Começa-se por calcular:

$$f'(x) = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Calcula-se os zeros da função derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

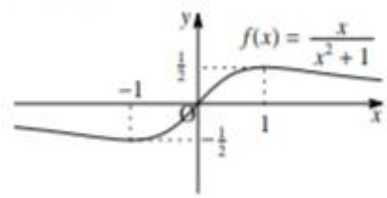
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	Mín	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Pela tabela, a função $f(x)$ tem para $x = 1$ um extremo máximo.

Como $f(1) = \dfrac{1}{2}$, o ponto do extremo máximo é $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$.

Opção: D

← **Derivada do quociente de duas funções**:
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$



← Há posibilidade de ter extremos para $x = \pm 1$.

← ⋆ Se uma função $f(x)$ tem **derivada nula** para $x = a$ (ou seja $\boldsymbol{f'(a) = 0}$) e $f'(x)$ passa nesse ponto de **negativa a positiva**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **mínimo**.

⋆ Se uma função $f(x)$ tem **derivada nula** para $x = a$ (ou seja $\boldsymbol{f'(a) = 0}$) e $f'(x)$ passa nesse ponto de **positiva a negativa**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **máximo**.

← Subsitui-se x por 1 em $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

33.

A recta de equação $y = 3x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa $x = 1$. Qual das expressões pode definir a função f?

A. $f(x) = x^2 + x + 1$ B. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ C. $f(x) = x^2 + 3x - 1$ D. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Como o declive da equação $y = 3x$ é 3, pela condição, tem-se $f'(1) = 3$. Então, para que se verifique $f'(1) = 3$, calcula-se o valor de $f'(1)$ da função de cada opção:

A. Como $f'(x) = 2x + 1$, então $f'(1) = 3$.

B. Como $f'(x) = 2x + 3$, então $f'(1) = 5$.

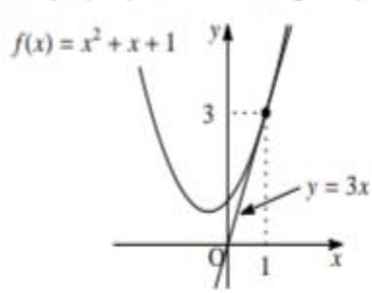
C. Como $f'(x) = 2x + 3$, então $f'(1) = 5$.

D. Como $f'(x) = 2x + 2$, então $f'(1) = 4$.

Portanto, a opção correcta é A.

Opção: A

← O **declive** da equação da recta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ em $\boldsymbol{x = a}$ é igual a $\boldsymbol{f'(a)}$.



34.

Um projéctil é lançado verticalmente de baixo para cima. Admitindo que a sua trajectória é descrita pela equação $h(t) = \frac{4}{3}t^3 - 2t^2 + t$, qual é, em m/s^2, a aceleração do projéctil 3 segundos após o lançamento?

A. 4m/s^2 B. 20m/s^2 C. 24m/s^2 D. 36m/s^2

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

A velocidade do projéctil t segundos após o lançamento é:

$h'(t) = \left(\frac{4}{3}t^3 - 2t^2 + t\right)' = \frac{3}{4} \cdot 3t^2 - 2 \cdot 2t + 1 = 4t^2 - 4t + 1$

← Se h é a posição de um ponto P que se move verticamente na hora t e apresentada por $\boldsymbol{h = f(t)}$, então a velocidade $\boldsymbol{v}$ e aceleração $\boldsymbol{a}$ do ponto P na hora t são dadas por $\boldsymbol{v = f'(t)}$ e $\boldsymbol{a = f''(t)}$, respectivamente.

Logo, a aceleração do projéctil t segundos após o lançamento é:

$h''(t) = (4t^2 - 4t + 1)' = 8t - 4$

Portanto, a aceleração do projéctil 3 segundos após o lançamento é:

$$h''(3) = 8 \cdot 3 - 4 = 20$$

← Substitui-se t por 3 em $h''(t) = 8t - 4$.

Opção: B

35.

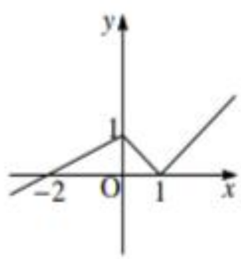
Quais são as abcissas dos pontos em que a função não é derivável?

A. −2 e 0

B. −2 e 1

C. 0 e 1

D. 1 e 2



2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Calcula-se as derivadas laterais de $f(x)$ em $x = 0$ e $x = 1$.

Pela leitura da figura, a derivada lateral à esquerda de 0 é:

$$f'(0^-) = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$$

← $f'(0^-)$ é igual ao declive da recata da esquerda do ponto $x = 0$.

E a derivada lateral à direita de 0 é:

$$f'(0^+) = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

← $f'(0^-)$ é igual ao declive da recata da esquerda do ponto $x = 0$.

Logo, como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, então não é derivável no ponto $x = 0$.

← Uma função é derivável num ponto $x = a$ se e só se é derivável à esquerda e à direita do mesmo ponto e as derivadas laterais são iguais: $\boldsymbol{f'(a^+) = f'(a^-)}$

De modo igual, pela leitura da figura, é claro que:

$$f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

Logo, não é derivável também no ponto $x = 0$.

Por isso, a função não é derivável nos pontos $x = 0$ e $x = 1$.

Opção: C

Somente para a Secção de Letras

36.
Quais são as medidas dos catetos de um triângulo cuja hipotenusa mede 6cm e um dos ângulos mede 60°?

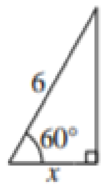
A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$cm e $\frac{1}{12}$cm B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$cm e $\frac{\sqrt{3}}{2}$cm C. 3cm e $3\sqrt{3}$cm D. 3cm e 6cm

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Sejam x e y as medidas dos catetos como a figura mostra. Então tem-se:

$$\text{sen}60° = \frac{y}{6} \text{ e } \cos 60° = \frac{x}{6}$$



Como $\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tem-se:

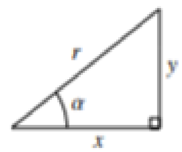
$$\text{sen}60° = \frac{y}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{6} \Leftrightarrow 2y = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{3}$$

Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$, tem-se:

$$\cos 60° = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Portanto, as medidas dos catetos são 3cm e $3\sqrt{3}$cm.

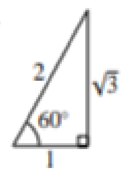
Opção: C

← 

★ $\text{sen}\alpha = \frac{y}{r}$
★ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$
★ $\text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

← $\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

← $\cos 60° = \frac{1}{2}$



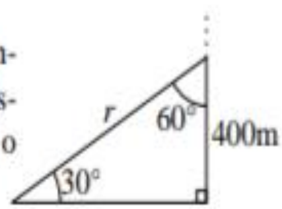
37.
Um pára-quedista salta de um avião a 400m de altitude. Dirige-se para o solo, formando um ângulo de 60° com a vertical. Que distância percorre o pára-quedista?

A. 200m B. $200\sqrt{3}$m C. $300\sqrt{3}$m D. 800m

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

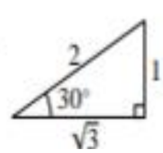
Se r é a medida da hipotenusa do triangulo como a figura mostra, então a distância que o pára-quedista percorre é o valor de r.



Pela leitura da figura, tem-se:

$$\text{sen}30° = \frac{400}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{400}{r} \Leftrightarrow r = 800$$

Opção: D

← 

$\text{sen}30° = \frac{1}{2}$

38.

Qual é o complementar, em $\mathbb{R}$, do conjunto $M =]-3;5[$?

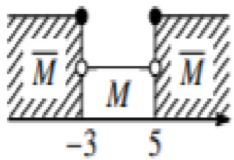
A. $]-\infty;-3]\cup[5;+\infty[$ B. $]-\infty;-3]\cup]5;+\infty[$ C. $]-\infty;-3[\cup[5;+\infty[$ D. $]-\infty;-3[\cup]5;+\infty[$

2011.1ªÉpoca

[Resolução]

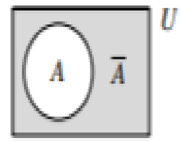
Pela leitura da figura, o complementar do conjunto M é:

$$\overline{M} =]-\infty;-3]\cup[5;+\infty[$$



Opção: A

Considerem-se os conjuntos U (Universal) e A, de tal modo que $A \subset U$. Chama-se **complementar do conjunto** A, ao conjunto de todos os elementos que pertencem a U e não pertencem a A.



39.

Dados os conjuntos $M = \{2;4;6\}$ e $N = \{1;2;3;6\}$. Qual é o cardinal de $M \cup N$?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2011.1ªÉpoca

[Resolução]

$M \cup N = \{1;2;3;4;6\}$

Como $M \cup N$ contém 5 elementos, o cardinal de $M \cup N$ é 5.

Opção: D

⟵ $M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ ou } x \in N\}$

⟵ Chama-se cardinal ao número de elementos de um conjunto.

40.

Num seminário com 50 participantes, 21 falam português, 14 falam inglês, 9 falam português e inglês e os restantes falam outras línguas. Quantos falam outras línguas?

A. 15 B. 21 C. 24 D. 35

2011.1ªÉpoca

[Resolução]

Sejam U- Conjunto de todos os participantes no seminário;

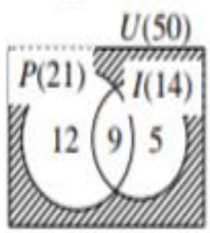
P- Conjunto dos participantes que falam portugûes;

I - Comjunto dos participantes que falam inglês.

Então pode-se construir o diagramma de Venn como a figura mostra.

A partir do diagramma, os participantes que falam outras línguas são:

$50-(12+9+5) = 50-26 = 24$



Opção: C

⟵ Nota-se que:

$n(U) = 50$, $n(P) = 21$, $n(I) = 14$ e $n(P \cap I) = 9$.

Os participantes que falam só português são $21-9=12$.

Os participantes que falam só inglês são $14-9=5$.

Somente para a Secção de Ciências

36.

Para que os pontos $(0; -3)$, $(k; 7)$ e $(-1; -5)$ sejam colineares, qual deve ser o valor de k?

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

A equação da recta que passa pelos pontos $(0; -3)$ e $(-1; -5)$ é:

$$y-(-3)=\frac{-5-(-3)}{-1-0}(x-0) \Leftrightarrow y+3=2x \Leftrightarrow y=2x-3$$

Como esta recta também passa pelo ponto $(k; 7)$, tem-se:

$7=2k-3 \Leftrightarrow 2k=10 \Leftrightarrow k=5$

Opção: B

⟵ A equação da recta que passa pelos pontos $(x_1; y_1)$ e $(y_1; y_2)$ é dada por: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

⟵ Substitui-se $x=k$ e $y=7$ em $y=2x-3$.

37.

Considere a função f definida pela tabela seguinte:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Qual é o valor de $f[f(4)]$?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Pela leitura da tabela, tem-se: $f[\boldsymbol{f(4)}]=f(\mathbf{5})=2$

Opção: C

⟵ Pela 5ªcoluna, tem-se $f(4)=5$ e pela 6ª coluna, tem-se $f(5)=2$.

38.

Usando a unidade imaginária i, como pode ser escrito o número $\sqrt{-4}$?

A. $-2i$ B. i C. $2i$ D. Não existe

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$

Opção: C

⟵ **Definição de número imaginario:**

★ $\sqrt{-1}=i$; ★ $i=-1$

39.

Qual é a função cuja primeira derivada em ordem a x é $f(x)=x^3+2x$?

A. $\frac{x^4}{4}+x^2$ B. x^4+x^2 C. $-\frac{x^4}{4}-x^2$ D. x^4+2x

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Deriva-se a função de cada opção para se encontrar a função cuja primeira derivada é $f(x) = x^3 + 2x$:

A: $\left(\frac{x^4}{4} + x^2\right)' = \frac{4x^3}{4} + 2x = x^3 + 2x = f(x)$

B: $\left(x^4 + x^2\right)' = 4x^3 + 2x$

C: $\left(-\frac{x^4}{4} - x^2\right)' = -\frac{4x^3}{4} - 2x = -x^3 - 2x$

D: $(x^4 + 2x)' = 4x^3 + 2$

Portanto, a opção correcta é A.

Opção: A

【Outra resolução】

Determina-se a primitiva de $f(x) = x^3 + 2x$.

O integral de $f(x)$, sendo $c \in \mathbb{R}$, é:

$$\int (x^3 + 2x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c = \frac{x^4}{4} + x^2 + c$$

Quando $c = 0$, isto será $\frac{x^4}{4} + x^2$ da opção A.

⟵ Por $\left(\frac{x^4}{4} + x^2\right)' = f(x)$, a opção A é a solução.

★**Definição da função primitiva**:

Sejam $F(x)$ e $f(x)$ duas funções contínuas.

A função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ para qualquer x do domínio de $f(x)$ se a derivada de $F(x)$ é igual a $f(x)$, isto é, $F'(x) = f(x)$.

★**Definição de integral indefinida**:

Se $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, chama-se integral indefinida, à expressão $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e c é uma constante.

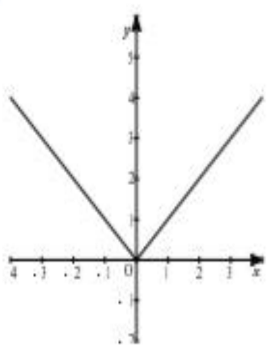
$\boldsymbol{F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

⟵**Fórmula**: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, onde $c \in \mathbb{R}$.

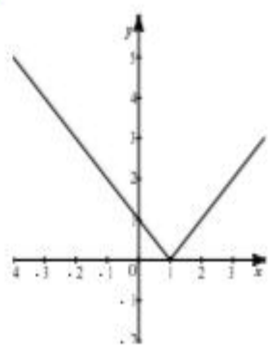
40.

Qual das figuras representa o gráfico da função $f(x) = |1 - x|$?

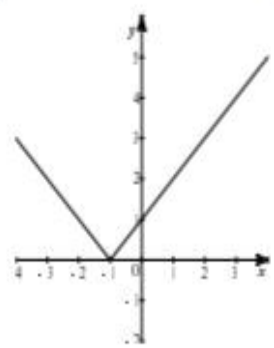
A.



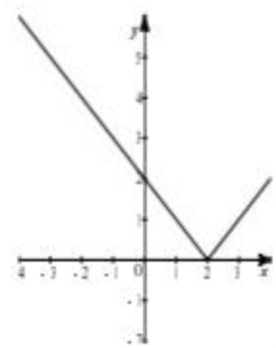
B.



C.



D.



2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = |1 - x| = |x - 1|$.

A opção A representa o gráfico da função de $y = |x|$.

O gráfico de $y = |x - 1|$ obtém-se a partir do gráfico de $y = |x|$ através da translação de 1 unidade para direita. Então, o gráfico de $f(x)$ é da opção B.

Opção: B

【Outra resolução】

Substituindo $x = 1$ em $f(x) = |1 - x|$, tem-se:

$$f(1) = |1 - 1| = 0$$

Portanto, o gráfico da função passa pelo ponto (1; 0).

Verifica-se que só o gráfico da opção B passa pelo ponto (1; 0).

Então, a solução é a opção B.

⟵ $y = |1 - x| = |-(x - 1)| = |x - 1|$

⟵ O gráfico da função $y = |x|$ passa pela origem.

⟵ O gráfico da função $y = f(x - p) + q$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da translação de p unidades para direita e q unidades para cima.

Os gráficos das função $y = |x|$ e $y = |x - 1|$ são: